Тема – интегрирование функций комплексного переменного

1. Изучить теорию и примеры из учебника.
2. Разобрать примеры, приведенные здесь.
3. Выполнить домашнее задание (по учебнику): №№ 104б, 106, 108, 110, 113, 115, 117, 119,122.

Вычислить интегралы.

№102.

$$\int_{\Gamma} z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz\,, \Gamma\colon |z| = 1\ (-\pi \le \arg z \le 0)$$

Сделаем замену переменной: $z = e^{i\varphi}$, так как путь интегрирования – это нижняя полуокружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1: $\Gamma\colon \rho = |z| = 1\ (-\pi \le \varphi = \arg z \le 0)$.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$z\,\mathrm{Im}\,z^2 = e^{i\varphi}\,\mathrm{Im}\,e^{2i\varphi} = e^{i\varphi}\cdot \sin 2\varphi\,;\ \ dz = ie^{i\varphi}d\varphi$$

Исходный интеграл приобретает вид:

$$\int_{\Gamma} z\,\mathrm{Im}\,z^2 dz = \int_{-\pi}^{0} e^{i\varphi}\cdot\sin 2\varphi\cdot ie^{i\varphi}d\varphi = \int_{-\pi}^{0} ie^{i2\varphi}\cdot\sin 2\varphi\,d\varphi = i\int_{-\pi}^{0}(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)\cdot\sin 2\varphi\,d\varphi$$

$$= i\int_{-\pi}^{0}\cos 2\varphi\sin 2\varphi\,d\varphi + i^2\int_{-\pi}^{0}\sin^2 2\varphi\,d\varphi = \frac{i}{8}\int_{-\pi}^{0}\sin 4\varphi\,d(4\varphi) - \int_{-\pi}^{0}\frac{1-\cos 4\varphi}{2}d\varphi$$

$$= -\frac{i}{8}(\cos 0 - \cos(-4\pi)) - \frac{1}{2}\big(0-(-\pi)\big) + \frac{1}{2\cdot 4}(\sin 0 - \sin(-4\pi)) = -\frac{\pi}{2}.$$

№103.

$\int_{\Gamma} e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z\,dz$, Γ – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0;\ z_2 = 1+i$.

Γ – прямая, соединяющая точки $z_1 = 0;\ z_2 = 1+i$, проходит через точки $(0;0)$ и $(1;1)$ комплексной плоскости, следовательно, описывается уравнением: $y = x$.

Преобразуем подынтегральное выражение:

$$e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z = e^{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\cdot x = e^{x^2+y^2}\cdot x; dz = d(x+iy) = dx + idy$$

Учитывая путь интегрирования, имеем:

$$e^{|z|^2}\,\mathrm{Re}\,z = e^{2x^2}\cdot x; dz = dx(1+i)$$

Исходный интеграл приобретает вид:

$$\int\limits_{\Gamma} e^{|z|^2}\operatorname{Re} z\, dz = \int\limits_0^1 e^{2x^2}\cdot x\cdot dx(1+i) = (1+i)\int\limits_0^1 e^{2x^2}\cdot x dx = \frac{1+i}{4}\int\limits_0^1 e^{2x^2} d(2x^2) = \frac{1+i}{4} e^{2x^2}\Big|_0^1$$

$$= \frac{1+i}{4}(e^2-1).$$

№104

$$\int\limits_{\Gamma} \ln z\, dz\,, \Gamma\colon |z| = 1$$

а) начальная точка интегрирования $z_0 = 1$, обход против часовой стрелки.

Путь интегрирования - это окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

Сделаем замену переменной: $z = e^{i\varphi}$, из условия следует, что $\varphi \in [0; 2\pi]$.

$$\ln z = \ln|z| + i\varphi = \ln 1 + i\varphi = i\varphi;\ dz = ie^{i\varphi}d\varphi.$$

$$I = \int\limits_{\Gamma} \ln z\, dz = \int\limits_0^{2\pi} i\varphi i e^{i\varphi} d\varphi = i\int\limits_0^{2\pi} \varphi e^{i\varphi} d(i\varphi)$$

Проинтегрируем по частям: $u = \varphi; du = d\varphi; dv = e^{i\varphi}d(i\varphi); v = e^{i\varphi}$.

$$I = i\left(\varphi\cdot e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} e^{i\varphi}d\varphi\right) = i\left(2\pi e^{2\pi i} - 0 - \frac{1}{i}e^{i\varphi}\Big|_0^{2\pi}\right) = 2\pi i(\cos(2\pi) + i\sin 2\pi) - e^{2\pi i} + e^0$$

$$= 2\pi i + 1 - \cos 2\pi - i\sin 2\pi = 2\pi i + 1 - 1 - 0 = 2\pi i.$$

№109

$$\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz$$

Подынтегральная функция является аналитической функцией на всей комплексной плоскости, поэтому интеграл не зависит от пути и можно использовать формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)dz = \frac{1}{2}\int\limits_{1+i}^{-1-i} (2z+1)d(2z+1) = \frac{1}{4}(2z+1)^2\Big|_{1+i}^{-1-i}$$

$$= \frac{1}{4}[(2\cdot(-i-1)+1)^2 - (2\cdot(i+1)+1)^2] = \frac{1}{4}[(-2i-1)^2 - (2i+3)^2]$$

$$=\frac{1}{4}(-2i-1-2i-3)(-2i-1+2i+3)=\frac{2}{4}(-4i-4)=-2(i+1).$$

№ 112

$$\int_{\Gamma} e^z dz$$

а) Γ – дуга параболы $y=x^2$, соединяющая точки $z_1=0;\ z_2=1+i$.

Подынтегральная функция является аналитической функцией на всей комплексной плоскости, поэтому интеграл не зависит от пути и можно использовать формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_{\Gamma} e^z dz=\int_0^{1+i} e^z dz=e^z \Big|\begin{matrix}1+i\\0\end{matrix}=e^{1+i}-e^0=e^1(\cos 1+i\sin 1)-1=e\cdot\cos 1-1+i\cdot\ e\cdot\sin 1\,.$$