МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

ФИНАНСОВОГО АНАЛИЗА

ВВЕДЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Заключение любой коммерческой сделки предусматривает, как правило, вложения и поступления распределенных во времени денежных сумм. Эффективность финансовой операции зависит от множества параметров и условий, оговариваемых в контрактах, не учет которых может привести к нежелательным результатам.

Правильная оценка финансовых решений невозможна без применения количественных методов финансового анализа. В связи с этим изучение и овладения основными понятиями и методами количественного финансового анализа является одной из составных составляющих в профессиональной подготовке экономистов всех специальностей.

1. Начисление процентов

1.1. Фактор времени в количественном анализе финансовых операций.

В финансовых операциях суммы денег обязательно связываются с конкретными моментами или интервалами времени. Фактор времени играет не менее важную роль, чем размеры самих денежных сумм. Необходимость учета этого фактора выражается в виде *принципа неравноценности* денег, относящихся к различным моментам времени. В наиболее общем виде этот принцип можно сформулировать следующим образом: сегодняшние деньги ценнее будущих, а будущие поступления менее ценны, чем настоящие. Следствием принципа неравноценности денег является неправомерность суммирования денег, относящихся к разным моментам времени при анализе финансовых операций.

1.2. Проценты и процентные ставки

Под процентными деньгами или *процентами* понимается абсолютная величина дохода от предоставления денег в долг в любой форме. Под *процентной ставкой* понимается отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный промежуток времени, к величине ссуды.

Пусть P – первоначальная сумма денег (ссуда); S – сумма денег через некоторый интервал времени; i – ставка процентов. Тогда сумма процентных денег равна $S-P$, а процентная ставка, определяемая в виде десятичной дроби, определяется следующим образом

$$i = \frac{S-P}{P}.$$

Интервал, относительно которого определяется процентная ставка, называется *периодом начисления*. Процесс увеличения суммы денег путем присоединения процентов к первоначальной сумме называется *наращением* или *ростом первоначальной суммы*. Первоначальная сумма с начисленными на нее процентами называется *наращенной суммой*.

Существуют различные способы начисления процентов. Основное отличие связано с выбором исходной суммы (базы) для начисления. В связи с этим различают *простые* и *сложные* проценты. При начислении простых процентов базой для начисления служит начальная сумма на протяжении всего срока ссуды. При начислении сложных процентов базой служит сумма с начисленными в предыдущем периоде процентами.

В финансовом анализе процентная ставка применяется не только как инструмент наращения суммы долга, но и как универсальный показатель степени доходности любой финансовой операции.

1.3. Простые проценты

Пусть

$I -$ сумма процентов за весь период начисления;

$n -$ общее количество периодов начисления в годах;

$P -$ первоначальная сумма;

$S -$ наращенная сумма;

$i -$ ставка процентов в виде десятичной дроби.

1.3.1. Начисления простых процентов

Так как при начислении простых процентов за базу принимается первоначальная сумма P и проценты начисляются n раз, то сумма процентов за весь срок равна $I = Pni$, и наращенная сумма определяется следующим образом

$$S = P(1+ni). \tag{1.1}$$

Формула (1.1) называется *формулой простых процентов*. Величина $1+ni$ называется *множителем наращения* по простым процентам.

Простые проценты чаще всего используются, когда срок ссуды меньше года. Тогда $n = t/K$, где t – количество дней ссуды, K – количество дней в году. При этом используют *обыкновенный* или *коммерческий* процент, когда $K = 360$ дней или точный процент, когда $K = 365\,(366)$ дней.

Если весь срок ссуды n разбит на s промежутков длительностью n_t, то

$$n = \sum_{t=1}^{s} n_t\,. \tag{1.2}$$

Пусть в каждом промежутке действует ставка i_t. Тогда формула начисления простых процентов при переменной ставке будет иметь вид

$$S = P + Pn_1i_1 + Pn_2i_2 + \ldots + Pn_si_s$$

или

$$S = P(1+\sum_{t=1}^{s} n_ti_t)\,. \tag{1.3}$$

Реинвестирование – это дополнительное или повторное вложение средств в форме наращивания ранее вложенных средств за счет полученных от них доходов.

Когда происходит реинвестирование наращенных на каждом промежутке средств, то за базу при начислении процентов на очередном промежутке принимается не первоначальная сумма, а наращенная сумма, полученная на предыдущем промежутке. Формула начисления процентов при реинвестировании запишется следующим образом:

$$S = P(1+n_1 i_1)(1+n_2 i_2)...(1+n_s i_s). \tag{1.4}$$

1.3.2. Дисконтирование по простым процентным ставкам

Термин *дисконтирование* означает определение стоимости денежной суммы на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит величину S. Такой расчет называется *приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени.* Величину P, найденную дисконтированием суммы S, называют *современной* или *приведенной величиной* S.

С помощью дисконтирования учитывается фактор времени при анализе финансовых операций. Решая уравнение (1.1), получим

$$P = S\frac{1}{1+ni}. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) называется формулой *математического дисконтирования*.

Величина $\frac{1}{1+ni}$ называется *дисконтным множителем*, а разность $S-P$ называется *дисконтом* суммы S.

1.3.4. Определение продолжительности ссуды и процентных ставок

Продолжительность ссуды и процентную ставку для простых процентов определяют, решая уравнение (1.1):

$$n = \frac{S-P}{Pi}, \tag{1.6}$$

$$i = \frac{S-P}{Pn}. \tag{1.7}$$

1.4. Сложные проценты

В долгосрочных финансовых операциях для наращения первоначальной суммы применяют сложные проценты. В этом случае за базу принимают не первоначальную сумму, а сумму, получившуюся после начисления процентов и присоединения их к сумме долга в предыдущих периодах.

1.4.1. Начисления сложных процентов

Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служит базой для начисления, называется *капитализацией процентов*.

Процесс капитализации осуществляется по следующей схеме:

$$P + Pi = P(1+i) \to P(1+i) + P(1+i)i = P(1+i)^2 \to$$

$$\to P(1+i)^2 + P(1+i)^2 i = P(1+i)^3 \to ...$$

В общем виде формула наращения по сложным процентам запишется в виде:

$$S = P(1+i)^n \tag{1.8}$$

Множитель $(1+i)^n$ называется *множителем наращения* по сложным процентам. Когда $n = t/K$, где t – количество дней ссуды, K – количество дней в году, то формула (1.8) примет вид

$$S = P(1+i)^{\frac{t}{K}} \tag{1.9}$$

Если срок $n < 1$, то множитель наращения по простым процентам больше множителя наращения по сложным процентам. Если срок $n > 1$, то множитель наращения по простым процентам меньше множителя наращения по сложным процентам.

Формула начисления сложных процентов при переменной ставке будет иметь вид

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}\cdot\ldots\cdot(1+i_s)^{n_s}. \tag{1.10}$$

1.4.2. Номинальная и эффективная ставки процентов

Часто при объявлении условий финансовой операции оговаривается годовая ставка процентов и указывается количество начислений процентов в год. В этом случае используется понятие *номинальной ставки*, которую обозначают символом j, при этом количество начислений процентов в год равно m. Тогда начисление процентов осуществляется по ставке j/m, а общее количество интервалов начисления за n лет будет равно mn. Наращенная сумма определяется по формуле

$$S = P(1+j/m)^{mn}. \tag{1.11}$$

Номинальная ставка – это годовая ставка процентов при начислении процентов m раз в год. Чем больше число m, тем быстрее идет процесс наращения первоначальной суммы.

Для сравнения различных условий начисления процентов используется понятие *эффективной ставки*. Эффективная ставка – это годовая ставка процентов, начисляемых один раз в год, которая даст тот же финансовый результат, что и m-разовое начисление в год с использованием номинальной ставки j. Таким образом должно выполняться равенство множителей наращения

$$1+i = (1+j/m)^m,$$

где i – эффективная ставка. Тогда

$$i = (1+j/m)^m - 1. \tag{1.12}$$

Замена в договоре номинальной ставки j при начислении процентов m раз в год на эффективную ставку по формуле (1.12) не меняет финансовых обязательств сторон. При сравнении различных вариантов начисления процентов достаточно вычислить и сравнить эффективные ставки для каждого из них.

1.4.3. Дисконтирование по сложным процентам

Если требуется определить первоначальную сумму P, чтобы через n лет получить заданную сумму S, то осуществляется операция *дисконтирования*, т.е., исходя из формулы (1.8), определяется

$$P = \frac{S}{(1+i)^n} = S\nu^n, \tag{1.13}$$

где $\nu = \frac{1}{(1+i)}$ – *дисконтный множитель*. Если проценты начисляются m раз в год с использованием номинальной ставки j, то

$$P = \frac{S}{(1+j/m)^{mn}} = S\nu^{mn}. \tag{1.14}$$

В этом случае дисконтный множитель равен

$$\nu = \frac{1}{(1+j/m)}.$$

Величина P называется *современной* или *приведенной* величиной суммы S. Разность $D = S - P$ называется *дисконтом* суммы S. При этом $D = S(1-\nu^n)$, если проценты начисляются один раз в год, и $D = S(1-\nu^{mn})$, если проценты начисляются m раз в год.

Заметим, что наращенная сумма на некоторый промежуточный момент времени $0 < t < n$ равна современной величине платежа на тот же момент времени. Действительно, если S_t – наращенная сумма на момент времени t, P_t – современная величина на тот же момент времени, то

$$P_t = S\frac{1}{(1+i)^{n-t}} = P\frac{(1+i)^n}{(1+i)^{n-t}} = P(1+i)^t = S_t.$$

1.4.4. Определение продолжительности ссуды и процентных ставок

Определение продолжительности ссуды и процентных ставок осуществляется с использование уравнения (1.8)

$$S = P(1+i)^n.$$

Так, решая это уравнение относительно срока n, получим

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln(1+i)}. \tag{1.15}$$

Если используется номинальная ставка j с начислением процентов m раз в год, то

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{P}\right)}{\ln\left(1+\frac{j}{m}\right)^m}. \tag{1.16}$$

Используя уравнение (1.8) для определения процентной ставки, получим

$$i = \left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (1.17)$$

Если начисление процентов осуществляется по номинальной ставке m раз в год, то

$$j = m\left(\left(\frac{S}{P}\right)^{\frac{1}{mn}} - 1\right). \qquad (1.18)$$

1.4.5. Сложная учетная ставка

В практике учетных операций иногда применяют *сложную учетную ставку*. В этих случаях процесс дисконтирования происходит с замедлением, так как каждый раз учетная ставка применяется не к первоначальной сумме (как при простой учетной ставке), а к сумме, дисконтированной на предыдущем шаге во времени. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется согласно формуле

$$P = S(1-d)^n,$$

где d – сложная годовая учетная ставка. Если сравнить дисконтные множители

$$w_s = (1 - nd_s),\ \ w = (1-d)^n,$$

где d_s, d – простая и сложная учетные ставки соответственно, то можно сделать вывод, что дисконтирование по сложной учетной ставке выгоднее для должника, чем по простой учетной ставке. Согласно первой формуле значение дисконтного множителя равномерно уменьшается по мере роста n и достигает нуля при $\mathrm{n} = 1/\mathrm{d_s}$. Согласно второй – дисконтный множитель экспоненциально уменьшается и достигает нуля при $n = \infty$.

Дисконтирование может производиться m раз в году, т.е. каждый раз учет производится по ставке f/m, где f – *номинальная годовая учетная ставка*.

Тогда

$$P = S(1 - f/m)^{mn}. \qquad (1.19)$$

Эффективная учетная ставка (d) характеризует величину дисконтирования за год. Она определяется из равенства дисконтных множителей

$$(1-d)^n = (1 - f/m)^{mn}$$

или

$$d = (1 - f/m)^m. \qquad (1.20)$$

При этом номинальная годовая учетная ставка f равна

$$f = m(1 - \sqrt[m]{1-d}). \qquad (1.21)$$

Наращение по сложной ставке (эффективной и номинальной) осуществляется следующим образом:

$$S = \frac{P}{(1-d)^n}, \qquad (1.22)$$

$$S = \frac{P}{(1 - f/m)^{mn}}. \qquad (1.23)$$

1.5. Непрерывные проценты

Многие экономические процессы носят непрерывный характер. В силу этого возникает необходимость в использовании непрерывных процентов.

При использовании непрерывных процентов применяют особый вид процентной ставки, которая называется *силой роста*. Она характеризует относительный прирост наращенной суммы в бесконечно малом промежутке времени.

1.5.1. Постоянная сила роста

Непрерывное наращение процентов осуществляется согласно формуле (1.11)

$$S = P(1 + j/m)^{mn}.$$

Переходя к пределу при $m \to \infty$, получаем

$$S = \lim_{m\to\infty} P(1 + j/m)^{mn} = P \lim_{m\to\infty}(1 + j/m)^{mn}.$$

Учитывая, что $\lim_{m\to\infty}(1 + j/m)^m = e^j$, где e – основание натурального логарифма, получаем

$$S = Pe^{\delta n}. \tag{1.20}$$

Здесь δ – сила роста – номинальная ставка при $m \to \infty$.

Если известна сила роста, то можно определить эквивалентную ей дискретную годовую ставку. Если приравнять множители наращения по дискретным и непрерывным ставкам

$$(1+i) = e^{\delta},$$

то получим

$$i = e^{\delta} - 1. \tag{1.21}$$

Если известна дискретная годовая ставка, то можно определить эквивалентную ей непрерывную ставку

$$\delta = \ln(1+i). \tag{1.22}$$

Формула дисконтирования по непрерывной ставке при постоянной силе роста имеет вид

$$P = Se^{-\delta n}. \tag{1.23}$$

1.5.2. Переменная сила роста

Пусть сила роста изменяется во времени дискретно и принимает значения $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_k$ в интервалах времени $n_1, n_2, \ldots n_k$. Тогда за n_1 лет первоначальная сумма P станет равной $S_1 = Pe^{\delta_1 n_1}$. Так как процентная ставка сложная, то за следующие n_2 лет первоначальная сумма вырастет и станет равной

$$S_2 = S_1 e^{\delta_2 n_2} = Pe^{\delta_1 n_1 + \delta_2 n_2}.$$

Наращенная сумма за весь срок определяется следующим образом:

$$S = Pe^{\sum_{t=1}^{k} \delta_t n_t}. \tag{1.24}$$

Формула дисконтирования в этом случае имеет вид

$$P = Se^{-\sum_{t=1}^{k}\delta_t n_t}. \qquad (1.25)$$

Если сила роста меняется непрерывно и описывается некоторой непрерывной функцией времени $\delta(t)$, то наращенная сумма будет равна

$$S = Pe^{\int_0^n \delta(t)dt}. \qquad (1.26)$$

Формула дисконтирования в этом случае имеет вид

$$P = Se^{-\int_0^n \delta(t)dt}. \qquad (1.27)$$

1.6. Учет инфляции

При осуществлении финансовых операций необходимо учитывать влияние инфляции. Существует много способов учета инфляции. Один из них основан на применении формулы Фишера.

Пусть h – ожидаемый годовой темп инфляции в виде ставки сложных процентов, i – ставка процентов без учета инфляции, r – реальная ставка с учетом инфляции. Тогда реальная ставка определяется из уравнения, которое называется уравнением Фишера:

$$(1+r) = (1+i)(1+h)^{-1}.$$

Решая это уравнение относительно r, получим

$$r = \frac{i-h}{1+h}. \qquad (1.28)$$

Ставка без учета инфляции, которую называют также номинальной ставкой, равна $i = r + h + rh$. При малых значениях h используют приближенную формулу $i = r + h$, а для реальной ставки $r = i - h$.

1.7. Эквивалентность процентных ставок

Ставки являются эквивалентными, если в конкретной финансовой операции они приводят к одному и тому же финансовому результату. Задача определения эквивалентных ставок возникает при определении ставок, применяемых в различных сделках и соглашениях, при определении эффективности финансово-кредитных операций, безубыточной замене одного вида ставок другим или одного метода их начисления другим.

Для определения эквивалентных простых и сложных ставок необходимо приравнять соответствующие множители наращения

$$(1+ni_n) = (1+i)^n,$$

где i_n – простая ставка, i – сложная. Тогда

$$i_n = \frac{(1+i)^n - 1}{n}, \qquad (1.29)$$

$$i = (1+ni_n)^{\frac{1}{n}} - 1. \qquad (1.30)$$

Если проценты начисляются m раз в год, то

$$i_n = \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn} - 1}{n}, \tag{1.31}$$

$$j = m((1+ni_n)^{\frac{1}{mn}} - 1). \tag{1.32}$$

1.8. Изменения условий контракта

Под *изменением условий контракта* будем понимать отдаление срока платежа или консолидирование платежей, то есть объединение нескольких обязательств в одно.

Изменение условий контракта осуществляется на основе *принципа финансовой эквивалентности обязательств.* Этот принцип гарантирует безубыточность изменений финансовых отношений для каждой из сторон. Эквивалентными считаются платежи, которые, будучи приведенными по заданной процентной ставке к одному моменту времени, оказываются равными.

Общий метод решения подобных задач – это составление *уравнения эквивалентности.* В этом уравнении сумма заменяемых платежей, приведенных к какому-то одному моменту времени, приравнивается сумме платежей по новому обязательству, приведенной к тому же моменту времени.

Пусть имеются платежи $S_1, S_2, ..., S_n$, сроки которых равны $n_1, n_2, ..., n_n$. Эти платежи объединяются в один платеж S_0 со сроком выплаты n_0.

Возможны два варианта *консолидации* платежей:

1) задан срок консолидированного платежа n_0, необходимо определить его размер S_0;

2) известен размер консолидированного платежа S_0, необходимо определить его срок n_0.

Пусть консолидация платежей осуществляется с использованием простой процентной ставки. Для первого варианта необходимо привести все платежи к моменту n_0. Платежи, сроки которых меньше n_0, необходимо нарастить по формуле простых процентов. Платежи, сроки которых больше n_0, необходимо дисконтировать.

Обозначим

S_j – размеры платежей, сроки которых $n_j < n_0$;

S_k – размеры платежей, сроки которых $n_k > n_0$;

$t_j = n_0 - n_j$ – время от момента выплаты j-го платежа со сроком $n_j < n_0$ до момента выплаты суммы S_0;

$t_k = n_k - n_0$ – время от момента выплаты k-го платежа со сроком $n_k > n_0$ до момента выплаты суммы S_0;

i – простая ставка процентов.

Тогда

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + t_j i) + \sum_k S_k (1 + t_k i)^{-1} . \qquad (1.33)$$

Первая сумма в этом уравнении объединяет все платеже, сроки которых $n_j < n_0$, вторая – сроки которых $n_k > n_0$. Таким образом, мы получим сумму, которая эквивалентна всем распределенным во времени платежам.

Консолидирование по сложной ставке процентов приводит к соотношению

$$S_0 = \sum_j S_j (1 + i)^{t_j} + \sum_k S_k (1 + i)^{-t_k} . \qquad (1.34)$$

Если известен размер консолидированного платежа S_0, и необходимо определить его срок n_0, то удобнее привести все платежи на момент времени, который принят за начало отсчета. Для простой ставки процентов уравнение эквивалентности запишется в виде

$$S_0 (1 + n_0 i)^{-1} = \sum_s S_s (1 + n_s i)^{-1} .$$

Современная величина заменяемых платежей определяется следующим образом:

$$P_0 = \sum_s S_s (1 + n_s i)^{-1} .$$

Тогда

$$P_0 = S_0 (1 + n_0 i)^{-1}.$$

Решая это уравнение относительно n_0, получим

$$n_0 = \frac{1}{i}\left(\frac{S_0}{P_0} - 1\right). \qquad (1.35)$$

Решение этой задачи существует, если $S_0 > P_0$, так как только в этом случае $n_0 > 0$.

Уравнение эквивалентности на основе сложной ставки процентов запишется в виде

$$S_0 (1 + i)^{-n_0} = \sum_s S_s (1 + i)^{-n_s} .$$

Если обозначить $Q = \sum_s S_s (1 + i)^{-n_s}$ – сумму дисконтированных на начальный момент платежей, то, решая относительно n_0 уравнение $S_0 (1 + i)^{-n_0} = Q$, получим

$$n_0 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{Q}\right)}{\ln(1 + i)} .$$

Решение этой задачи существует, если $S_0 > Q$, так как только в этом случае $n_0 > 0$ (формально это следует из свойств логарифмической функции).

В общем случае несколько платежей могут заменяться также несколькими платежами. Пусть

S_q – платежи со сроками n_q, которые предусматриваются новыми условиями,

S_k – заменяемые платежи со сроками n_k.

Будем предполагать, что все платежи приводятся на начальный момент времени. Тогда уравнение эквивалентности для простой ставки примет вид

$$\sum_q S_q(1+n_q i) = \sum_k S_k(1+n_k i), \tag{1.36}$$

а для сложной ставки –

$$\sum_q S_q v^{n_q} = \sum_k S_k v^{n_k} \tag{1.37}$$

Данные уравнения не имеют единственного решения и в некоторых случаях могут быть решены только путем подбора.

2. Анализ потоков платежей

Потоком платежей будем называть последовательность выплат, приуроченных к разным моментам времени.

Поток платежей, все элементы которого являются положительными, а временные интервалы между двумя последовательными платежами постоянны, называют *финансовой рентой* или *аннуитетом* вне зависимости от цели, назначения и происхождения этих платежей. Финансовая рента имеет следующие параметры:

1) член ренты – величина каждого отдельного платежа;
2) период ренты – временной интервал между платежами;
3) срок ренты – время от начала ренты до конца ее последнего периода;
4) процентная ставка – ставка, которая используется для наращения или дисконтирования платежей, из которых состоит рента.

Кроме того, могут быть дополнительные параметры: количество платежей в год, количество начислений процентов в год, моменты выплаты платежей (в начале или в конце периода ренты) и т.д.

Различают следующие виды финансовых рент.

Годовые, если ее период равен одному году, и p*-срочные*, если ее период меньше года и количество платежей в год равно p. Эти ренты относятся к *дискретным*, так как выплаты приурочены к дискретным моментам времени.

Непрерывные, если поток платежей описывается непрерывной функцией.

Постоянные, если все ее платежи одинаковы и не меняются во времени, и *переменные*, если размеры платежей зависят от времени.

По вероятности уплаты ренты делят на *верные*, если условия выплаты платежей по ренте (размеры, количество и сроки) определены заранее, и *условные*, если выплата очередного платежа ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события (выплаты пенсий, платежи по личному страхованию). Количество выплат в условной ренте заранее не известно.

Рента называется *ограниченной*, если количество платежей конечно, и *бесконечной* или *вечной*, в противном случае. Например, долгосрочное обязательство, когда срок продолжителен и заранее не оговорен.

Ренты бывают *немедленные* и *отложенные (отсроченные)*. Срок немедленных рент начинается с момента заключения контракта, для отложенных рент срок начала выплат отодвигается на какое-то время.

Если платежи осуществляются в конце периода, то такая рента называется *обычной* или *постнумерандо*, если в начале периода – то *пренумерандо*.

Для анализа потоков платежей необходимо рассчитывать их основные обобщающие характеристики: наращенную сумму и современную величину ренты. *Наращенной суммой* потока платежей называют сумму всех последовательных платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты. *Современной величиной* потока платежей называют сумму всех платежей, дисконтированных на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или упреждающий его.

При вычислении наращенных сумм необходимо правильно установить момент поступления очередного платежа и определить срок, в течение которого на этот платеж будут начисляться проценты. После этого достаточно применить формулу начисления сложных процентов.

2.1. Наращенная сумма годовой ренты

Рассмотрим годовую ренту с начислением процентов один раз в год. Такая рента называется обычной.

Пусть

S – наращенная сумма ренты,

R – размер отдельного платежа,

i – ставка процентов в виде десятичной дроби,

n – срок ренты в годах.

Тогда $1,2,...n-1,n$ – последовательные моменты поступления платежей (в годах) и начисления процентов, $R(1+i)^{n-1}, R(1+i)^{n-2},..., R(1+i), R$ – размеры соответствующих платежей вместе с начисленными процентами. Для определения наращенной суммы S необходимо просуммировать полученный ряд платежей, который образует геометрическую прогрессию с первым членом $a_1 = R$, последним членом $a_n = R(1+i)^{n-1}$ и знаменателем, равным $1+i$.

Сумма членов геометрической прогрессии равна $s_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = \frac{a_n q - a_1}{q-1}$, где $a_1 = a,\ a_2 = aq,\ a_3 = aq^2,..., a_n = aq^{n-1}$.

Используя формулу суммы членов геометрической прогрессии, получим, что наращенная сумма годовой ренты вычисляется следующим образом:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}. \tag{2.1}$$

Если обозначить

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}, \tag{2.2}$$

то

$$S = Rs_{n,i}, \tag{2.3}$$

где $s_{n,i}$ называется коэффициентом наращения годовой ренты.

2.1.4. Наращенная сумма годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Пусть платежи поступают один раз в год в конце года (период ренты равен одному году), а начисление процентов происходит m раз в год. Тогда, при использовании сложных процентов по номинальной ставке j, размеры платежей в моменты времени $1,2,..n-1,n$ (в годах) вместе с начисленными процентами образуют ряд $R(1+j/m)^{m(n-1)}, R(1+j/m)^{m(n-2)},..., R(1+j/m)^m, R$, который является геометрической прогрессией с первым членом R и знаменателем $(1+j/m)^m$.

Для определения наращенной суммы воспользуемся формулой для суммы членов геометрической прогрессии. Тогда

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}. \tag{2.4}$$

Если обозначить

$$s_{n,j/m} = \frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1}, \tag{2.5}$$

то наращенная сумма будет вычисляться следующим образом

$$S = Rs_{n,j/m} \tag{2.6}$$

2.1.5. Наращенная сумма p - срочной ренты

Пусть платежи поступают p раз в год равными суммами, проценты начисляются один раз в год в конце года ($m=1$). Если R – годовая сумма платежа, то отдельный платеж равен $\frac{R}{p}$, а интервал между платежами равен $\frac{1}{p}$ лет.

Тогда $1/p, 2/p,...,1,..,n-1, n-1+1/p,..., n-1/p, n$ – моменты поступления платежей (в годах), а соответствующие размеры платежей с начисленными процентами образуют ряд

$$\frac{R}{p}(1+i)^{(n-1/p)}, \frac{R}{p}(1+i)^{(n-2/p)}, \frac{R}{p}(1+i)^{(n-1)},..., \frac{R}{p}(1+i), \frac{R}{p}(1+i)^{1-1/p},..., \frac{R}{p}(1+i)^{1/p}, \frac{R}{p}$$

.

Полученный ряд образует геометрическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{R}{p}$, знаменатель $(1+i)^{1/p}$, число членов ряда равно np. Сумма членов такой прогрессии вычисляется следующим образом

$$S = \frac{R((1+i)^{1/p})^{np} - 1}{p(1+i)^{1/p} - 1} = Rs_{n/i}^{(p)}, \qquad (2.7)$$

где $s_{n/i}^{(p)}$ – коэффициент наращения p-срочной ренты с начислением процентов один раз в год, равный

$$s_{n/i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p((1+i)^{1/p} - 1)}. \qquad (2.8)$$

2.1.6. Наращенная сумма p - срочной ренты при $p \neq m$, $m \neq 1$

Параметры такой ренты следующие: p платежей в год, m раз в год начисление процентов по номинальной ставке j. Рента с такими условиями называется *общей*. Первый платеж ренты равен $\frac{R}{p}$, момент поступления этого платежа (момент времени от начала срока ренты) равен $\frac{1}{p}$ и в конце срока ренты этот платеж даст сумму с процентами, равную

$$\frac{R}{p}\left(1+ j/m\right)^{(n-1/p)m}.$$

Второй платеж с начисленными на него процентами будет равен $\frac{R}{p}\left(1+ j/m\right)^{(n-2/p)m}$, предпоследний – $\frac{R}{p}\left(1+ j/m\right)^{\frac{1}{p}m}$, а последний $\frac{R}{p}$.

Полученные платежи образуют геометрическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{R}{p}$, знаменатель $\left(1+ j/m\right)^{\frac{1}{p}m}$, количество членов np.

Суммируя, получим

$$S = \frac{R((1+\frac{j}{m})^{mn} - 1)}{p((1+\frac{j}{m})^{\frac{m}{p}} - 1)} \qquad (2.9)$$

Если обозначить

$$s_{n,j/m}^{(p)} = \frac{\left(1+ j/m\right)^{mn} - 1}{p((1+ j/m)^{\frac{m}{p}} - 1)} \qquad (2.10)$$

коэффициент наращения p-срочной ренты при начислении процентов m раз в год, то формула для наращенной суммы примет вид

$$S = Rs_{n,j/m}^{(p)}. \qquad (2.11)$$

2.2. Современная величина потока платежей

Современная величина ренты является важнейшей характеристикой потока платежей, которая определяет стоимость будущего денежного потока на настоящий момент времени. По определению, современная величина – это сумма всех дисконтированных членов потока платежей на начальный или предшествующий ему момент времени. Иногда вместо термина *современная величина* используют термины *приведенная* или *капитализированная* сумма платежей.

2.2.1. Современная величина годовой ренты

Рассмотрим годовую ренту с начислением процентов один раз в год в конце года, которая называется обычной.

Пусть

A – современная величина ренты,

R – размер отдельного платежа,

i – ставка процентов в виде десятичной дроби,

n – срок ренты в годах,

$v = \dfrac{1}{1+i}$ – множитель дисконтирования, $1,2,..n-1,n$ – последовательные моменты поступления платежей (в годах).

Поток дисконтированных платежей на начало срока ренты образует ряд: $Rv, Rv^2, ..., Rv^{n-1}, Rv^n$. Показатели степеней – периоды времени в годах от начала ренты до момента поступления платежа. Полученный ряд является геометрической прогрессией с характеристиками: Rv – первый член прогрессии, v – знаменатель, n – количество членов прогрессии. Для получения современной величины потока просуммируем все члены ряда, используя формулу для суммы членов геометрической прогрессии. Тогда

$$A = \frac{Rv(v^n - 1)}{v-1} = R\frac{1-v^n}{i} = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i}.$$

Если обозначить

$$a_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad (2.12)$$

коэффициент приведения годовой ренты, то выражение для вычисления современной величины примет вид

$$A = Ra_{n,i}. \qquad (2.13)$$

2.4.2. Современная величина годовой ренты с начислением процентов m раз в год

Если в формулу (2.13) для современной величины годовой ренты вместо множителя дисконтирования $(1+i)^{-n}$ подставить множитель $(1+j/m)^{-mn}$, то

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m - 1}.$$

Обозначив

$$a_{n,j/m} = \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m - 1}, \qquad (2.14)$$

получим формулу для вычисления современной величины годовой ренты с начислением процентов m раз в год

$$A = Ra_{n,j/m}. \qquad (2.15)$$

2.4.3. Современная величина p - срочной ренты

Пусть платежи поступают p раз в год равными суммами, проценты начисляются один раз в год в конце года ($m=1$). Если R – годовая сумма платежа, то отдельный платеж равен $\frac{R}{p}$, а интервал между платежами равен $\frac{1}{p}$ лет, $1/p, 2/p, ..., 1, .., n-1, n-1+1/p, ..., n-1/p, n$ – моменты поступления платежей (в годах).

Поток дисконтированных платежей на начало срока ренты образует ряд:

$$\frac{R}{p}v^{1/p}, \frac{R}{p}v^{2/p}, \frac{R}{p}v, ..., \frac{R}{p}v^{n-1}, \frac{R}{p}v^{n-1+1/p}, ..., \frac{R}{p}v^{n-1/p}, \frac{R}{p}v^{n}.$$

Полученный ряд образует геометрическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{R}{p}v^{1/p}$, знаменатель $v^{1/p}$, число членов ряда равно np. Сумма членов такой прогрессии вычисляется следующим образом

$$A = \frac{Rv^{1/p}(v^{np/p}-1)}{p(v^{1/p}-1)} = \frac{R(v^n-1)}{p\left(1-\frac{1}{v^{1/p}}\right)} = \frac{R(1-(1+i)^{-n})}{p((1+i)^{1/p}-1)}. \qquad (2.16)$$

Обозначим

$$a_{n/i}^{(p)} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p}-1)} \qquad (2.17)$$

– коэффициент приведения p- срочной ренты. Тогда формула для расчета современной величины p- срочной ренты будет иметь вид

$$A = Ra_{n,i}^{(p)}. \qquad (2.18)$$

2.4.4. Современная величина p- срочной ренты при $p \neq m, m \neq 1$

Такая рента называется общей. Коэффициент дисконтирования такой ренты равен $v = \frac{1}{1+j/m}$. Первый дисконтированный платеж равен $\frac{R}{p}v^{\frac{m}{p}}$, второй –

$\frac{R}{p}\nu^{\frac{2m}{p}}$, предпоследний – $\frac{R}{p}\nu^{\left(n-\frac{1}{p}\right)m}$, а последний – $\frac{R}{p}\nu^{mn}$. Заметим, что показатель степени у множителя дисконтирования – это интервал времени (в годах) от начала ренты до момента поступления платежа с учетом m-разового в год начисления процентов. Ряд дисконтированных платежей образует геометрическую прогрессию, первый член которой равен $\frac{R}{p}\nu^{\frac{m}{p}}$, знаменатель – $\nu^{\frac{m}{p}}$, количество членов np. Сумма членов такой прогрессии вычисляется следующим образом:

$$A=\frac{R}{p}\frac{\nu^{\frac{m}{p}}(\nu^{mn}-1)}{\nu^{\frac{m}{p}}-1}=\frac{R}{p}\frac{(\nu^{mn}-1)}{\left(1-\frac{1}{\nu^{\frac{m}{p}}}\right)}=\frac{R(1-(1+j/m)^{-mn})}{p\left((1+j/m)^{\frac{m}{p}}-1\right)}.$$

Обозначим

$$a_{mn,j/m}^{(p)}=\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p\left((1+j/m)^{\frac{m}{p}}-1\right)} \qquad (2.19)$$

– коэффициент приведения общей ренты. Тогда формула для вычисления современной величины будет иметь вид

$$A=Ra_{mn,j/m}^{(p)}. \qquad (2.20)$$

2.5. Соотношение между наращенной и современной величинами рент

Пусть

A– современная величина годовой ренты на начало срока с начислением процентов один раз в год;

S – наращенная сумма этой ренты.

Тогда начисление процентов на сумму A за n периодов даст наращенную сумму ренты

Кроме того, справедливы следующие соотношения

$$S\nu^n=A,$$

$$a_{n,i}(1+i)^n=s_{n,i},$$

$$s_{n,i}\nu^n=a_{n,i}.$$

2.6. Параметры финансовых рент

Пусть имеем годовую ренту с начислением процентов один раз в год.

2.4.1. Размер платежа

Используя формулы для вычисления наращенной суммы и современной величины ренты, вычислим размер платежа

$$R = \frac{S}{s_{n,i}}, \quad (2.21)$$

$$R = \frac{A}{a_{n,i}}. \quad (2.22)$$

2.6.2. Срок ренты

Срок ренты определяется из решения уравнения

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

после преобразования которого, имеем

$$(1+i)^n = \frac{S}{R}i + 1.$$

Логарифмируя полученное уравнение, получаем

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}. \quad (2.23)$$

2.6.3. Ставка процентов

Если известна наращенная сумма, то необходимо решить относительно i уравнение

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}, \quad (2.24)$$

а если известна современная величина ренты, то уравнение

$$A = R\frac{1-(1+i)^n}{i}. \quad (2.25)$$

Это нелинейные уравнения, для которых невозможно получить аналитические решения. Приближенные решения могут быть получены с использованием численных методов простых итераций и Ньютона.

2.7. Переменные потоки платежей

Рассмотрим два вида переменных потоков платежей.

1. Пусть размер платежей зависит от времени, платежи поступают в конце года и проценты начисляются один раз в год, ставка процентов постоянна и равна i.

Обозначим R_t размер платежа в момент t, $t = 1,2,...,n$. Используя формулу для наращенной суммы, получим

$$S = R_1(1+i)^{n-1} + R_2(1+i)^{n-2} + ... + R_{n-1}(1+i) + R_n$$

или

$$S=\sum_{t=1}^{n}R_t(1+i)^{n-t}. \qquad (2.26)$$

Формула для определения современной величины потока платежей имеет вид

$$A=R_1v+R_2v^2+\dots+R_{n-1}v^{n-1}+R_nv^n$$

или

$$A=\sum_{t=1}^{n}R_tv^t. \qquad (2.27)$$

2. Пусть срок n разбит на k промежутков длительностью $n_{t,}$ $t=1,2,\dots,k,$ $\sum_{t=1}^{k}n_t=n$, и в каждом из этих промежутков размеры платежей постоянные, равные R_t. Проценты начисляются один раз в год, ставка постоянна и одинакова для всех промежутков. Внутри каждого промежутка платежи образуют годовую ренту.

Наращенная сумма платежей первого промежутка на момент его окончания n_1 определяется по формуле

$$S_1=R_1s_{n_1,i}.$$

Наращенная сумма платежей первого промежутка на момент n (окончания всего срока) равна

$$S_1(1+i)^{n-n_1}=R_1s_{n_1,i}(1+i)^{n-n_1}.$$

Наращенная сумма платежей второго промежутка на момент n_1+n_2 равна $S_2=R_2s_{n_2,i}$, а на момент окончания всего срока n –

$$S_2(1+i)^{n-(n_1+n_2)}=R_2s_{n_2,i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)}.$$

Наращенная сумма платежей последнего k-го промежутка на момент n_k и на окончание срока n равна $S_k=R_ks_{n_k,i}$.

Суммируя, получим наращенную сумму для всего потока платежей

$$S=R_1s_{n_1,i}(1+i)^{n-n_1}+R_2s_{n_2,i}(1+i)^{n-(n_1+n_2)}+\dots+R_ks_{n_k,i}. \qquad (2.28)$$

Если на каждом промежутке действует своя ставка i_t, $t=1,2,\dots,k$, то наращенная сумма определяется следующим образом

$$S=R_1s_{n_{1.i_1}}(1+i_2)^{n_2}(1+i_3)^{n_3}\dots(1+i_k)^{n_k}+$$
$$+R_2s_{n_{2.i_2}}(1+i_3)^{n_3}(1+i_4)^{n_4}\dots(1+i_k)^{n_k}+\dots+R_ks_{n_{k.i_k}} \qquad (2.29)$$

Выражение для современной величины потока платежей при постоянной ставке i получается аналогично и имеет вид

$$A=R_1a_{n_1.i}+R_2a_{n_2.i}v^{n_1}+R_3a_{n_3.i}v^{n_1+n_2}+\dots+R_ka_{n_k.i}v^{n-n_k}. \qquad (2.30)$$

Если на каждом промежутке действует своя ставка i_t, $t=1,2,\dots,k$, то современная величина определяется следующим образом

$$A=R_1a_{n_1,i_1}+R_2a_{n_2,i_2}v_1^{n_1}+R_3a_{n_3,i_3}v_1^{n_1}v_2^{n_2}+\dots+R_ka_{n_k,i_k}v_1^{n_1}v_2^{n_2}\cdots v_{k-1}^{n_{k-1}}. \qquad (2.31)$$

Если внутри промежутков поток платежей – p-срочная рента, то в полученных формулах следует использовать коэффициенты наращения или приведения для соответствующих p-срочных рент.

2.8. Дискретный поток платежей с непрерывным начислением процентов

Пусть платежи не зависят от времени и поступают один раз в конце периода, а проценты на них начисляются непрерывно. Тогда поток платежей с начисленными на них процентами на конец срока ренты запишется в виде

$$Re^{\delta(n-1)}. Re^{\delta(n-2)}, \dots, R.$$

Полученный ряд является геометрической прогрессией с первым членом R и знаменателем e^{δ}. Сумма членов такой прогрессии равна

$$S = Rs_{n,\delta}, \tag{2.32}$$

где коэффициент наращения

$$s_{n,\delta} = \frac{e^{\delta n} - 1}{e^{\delta} - 1}.$$

Если платежи поступают p раз в год, а начисление процентов непрерывное, то наращенная сумма равна

$$S = Rs_{n,\delta}^{(p)}, \tag{2.33}$$

где

$$s_{n,\delta}^{(p)} = \frac{e^{\delta n} - 1}{p(e^{\delta/p} - 1)}.$$

Современная величина дискретной ренты при непрерывном начислении процентов задается следующим рядом дискретных платежей, дисконтированных на начало срока ренты

$$\mathrm{Re}^{-\delta}, \mathrm{Re}^{-2\delta}, \dots, \mathrm{Re}^{-n\delta}.$$

Полученный ряд является геометрической прогрессией с первым членом $\mathrm{Re}^{-\delta}$ и знаменателем $e^{-\delta}$. Используя формулу для суммы членов такой прогрессии, получим соотношение для вычислении современной величины ренты

$$A = Ra_{n,\delta}, \tag{2.34}$$

где

$$a_{n,\delta} = \frac{1 - e^{-\delta n}}{e^{\delta} - 1}.$$

Если рента является p-срочной, то современная величина ренты вычисляется по формуле

$$A = Ra_{n,\delta}^{(p)}, \tag{2.35}$$

где

$$a_{n,\delta}^{(p)} = \frac{1-e^{-\delta n}}{p(e^{\frac{\delta}{p}}-1)}.$$

Если размер платежа R_t зависит от времени, то наращенная сумма и современная величина такого потока платежей с непрерывным начислением процентов имеют вид

$$S = \sum_t R_t e^{\delta(n-t)}, \quad (2.36)$$

$$A = \sum_t R_t\, e^{-\delta t}. \quad (2.37)$$

2.9. Непрерывный поток платежей с непрерывным начислением процентов

Пусть размер годового платежа не зависит от времени и равен R. Непрерывное поступление платежей означает, что в p-срочной ренте $p \to \infty$. Тогда коэффициент приведения непрерывной ренты с дискретным начислением процентов будет равен

$$\bar{a}_{n,i} = \lim_{p\to\infty} a_{n,i}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p}\frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = (1-(1+i)^{-n}) \lim_{p\to\infty} \frac{1}{p((1+i)^{\frac{1}{p}}-1)}.$$

Для определения предела воспользуемся правилом Лопиталя, согласно которому предел некоторого выражения равен пределу отношения производной числителя к производной знаменателя. Тогда

$$\lim_{p\to\infty} \frac{1}{p((1+i)^{\frac{1}{p}}-1)} = \lim_{p\to\infty} \frac{1/p}{(1+i)^{\frac{1}{p}}-1} = \lim_{p\to\infty} \frac{-1/p^2}{(1+i)^{\frac{1}{p}}\ln(1+i)(-\frac{1}{p^2})} = \frac{1}{\ln(1+i)}.$$

Таким образом, коэффициент приведения непрерывной ренты равен

$$\bar{a}_{n,i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\ln(1+i)} \quad (2.38)$$

и современная величина непрерывной ренты вычисляется следующим образом

$$A = R\bar{a}_{n,i}. \quad (2.39)$$

Для определения наращенной суммы непрерывной ренты рассмотрим коэффициент наращения для p-срочной ренты, который равен

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n-1}{p((1+i)^{1/p}-1)}.$$

Переходя к пределу, при $p \to \infty$, получим коэффициент наращения непрерывной ренты

$$\bar{s}_{n,i} = \frac{(1+i)^n-1}{\ln(1+i)}. \quad (2.40)$$

Аналогично можно определить коэффициенты приведения и наращения непрерывной ренты, если начисление процентов осуществляется m раз в год. В этом случае

$$\lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}\frac{1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=\frac{1}{m\ln(1+j/m)}.$$

Тогда коэффициент приведения будет иметь вид

$$\bar{a}_{mn,j/m}=\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{m\ln(1+j/m)}, \tag{2.41}$$

а коэффициент наращения –

$$\bar{s}_{mn,j/m}=\frac{(1+\frac{j}{m})^{mn}-1}{mln(1+\frac{j}{m})} \tag{2.42}$$

2.8. Непрерывные переменные потоки платежей

Пусть поток платежей является непрерывным, размер платежа зависит от времени и описывается непрерывной функцией времени $R_t=f(t)$. Начисление процентов производится также непрерывно.

Наращенная сумма по непрерывной ставке определяется по формуле

$$S=\int_0^n f(t)e^{\delta(n-t)}\,dt, \tag{2.43}$$

а современная величина –

$$A=\int_0^n f(t)e^{-\delta t}dt. \tag{2.44}$$

2.9. Конверсии рент

Конвертировать ренту означает изменить условия финансового соглашения, предусматривающего выплату этой ренты.

Разделяют простые и сложные виды рент. К простым видам конверсии относится следующее.

1. Выкуп ренты – замена ренты единовременным платежом. Из принципа финансовой эквивалентности следует, что при этом вместо ренты выплачивается ее современная величина.

2. Рассрочка платежей – замена единовременного платежа рентой. В этом случае современную величину ренты приравнивают к величине заменяемого платежа и определяют либо размер платежа такой ренты при заданном сроке, либо, если известен размер платежа, определяют срок ренты.

К сложным конверсиям относится замена одной ренты другой, что означает изменение параметров ренты. Из условия финансовой эквивалентности следует, что при такой замене современные величины этих рент должны быть равными. То есть, если $A1$ – современная величина заменяемой ренты, $A2$ – современная величина заменяющей ренты на тот же момент времени, то должно соблюдаться условие: $A1=A2$.

1. Замена немедленной ренты на отсроченную.

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами: R_1, n_1, i. Эта рента заменяется на отсроченную на t лет со сроком n_2 и ставкой i. Требуется найти размер платежа R_2 второй ренты. Из условия финансовой эквивалентности получаем уравнение

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i} v^t,$$

где v – множитель дисконтирования по ставке i. Тогда

$$R_2 = R_1 \frac{a_{n_1,i}}{a_{n_2,i}} (1+i)^t. \qquad (2.45)$$

Если $R_1 = R_2$, то для отсроченной ренты необходимо определить ее срок. Решая уравнение эквивалентности (2.45) относительно n_2, получим

$$n_2 = \frac{-\ln(1-(1-(1+i)^{-n_1}(1+i)^t))}{\ln(1+i)}. \qquad (2.46)$$

2. Изменение продолжительности и срочности ренты.

Пусть имеется годовая немедленная рента с параметрами: $R_1,\ n_1,\ i$. Эта рента заменяется другой, у которой параметры $R_2, n_2,\ i$. Если необходимо определить срок n_2, то приравнивая современные величины рент, получим уравнение

$$R_1 a_{n_1,i} = R_2 a_{n_2,i}, \qquad (2.47)$$

из которого определяется срок второй ренты n_2. Размер платежа второй ренты R_2 также определяется из уравнения (2.47).

Пусть p-срочная рента с параметрами $p_1,\ R_1,\ n_1,\ i_1$ заменяется на p-срочную ренту с параметрами $p_2,\ R_2,\ n_2,\ i_2$. Если необходимо определить размер платежа R_2 или срок n_2 второй ренты, то используется уравнение

$$R_1 a_{n_1,i_1}^{(p_1)} = R_2 a_{n_2,i_2}^{(p_2)}. \qquad (2.48)$$

3. Объединение рент.

Пусть имеется k годовых рент с начислением процентов один раз в год, параметры которых известны. Пусть A – современная величина заменяющей ренты, $A_q,\ q = 1,2,...,k$ – современные величины заменяемых рент. Тогда условие финансовой эквивалентности запишется следующим образом

$$A = \sum_{q=1}^{k} A_q. \qquad (2.49)$$

Если моменты начала рент не совпадают, то современные величины этих рент определяют на момент начала самой ранней ренты.

При объединении рент возникают две задачи:

1) определить размер платежа заменяющей ренты, если задан ее срок.

2) определить срок заменяющей ренты при заданных остальных параметрах.

Так как современная величина заменяющей ренты известна, то обе эти задачи сводятся к соответствующим задачам определения параметров годовой ренты.

3. Количественный анализ финансово-кредитных операций

Доходы от финансово-кредитных операций и различных коммерческих сделок могут иметь разную форму: проценты от выданных ссуд, комиссионные, доходы от облигаций и других ценных бумаг и т.д.

Как правило, в одной и той же операции предусматривается несколько источников дохода. В связи с этим возникает проблема измерения эффективности операций с учетом всех источников дохода. Обобщенная характеристика доходности должна быть универсальной и применимой к любым видам финансовых операций.

Степень финансовой эффективности операций обычно измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Данную ставку как показатель эффективности получают исходя из общего принципа: все дисконтированные по искомой ставке доходы приравниваются к приведенным по той же ставке и на тот же момент времени расходам. Из полученного уравнения определяют искомую ставку. Чем выше ставка, тем больше эффективность операции.

Данная процентная ставка непосредственно в контрактах не фигурирует и в зависимости от вида операции носит различные наименования. Основой для расчета полной доходности финансовой операции является соотношение, которое называется *балансом финансово-кредитной операции*.

3.1. Баланс финансово-кредитной операции

Необходимым условием любой финансово-кредитной операции является сбалансированность вложений и отдачи.

Пусть выдан кредит в размере K_0 на срок T. Ставка по кредиту равна i. Пусть на протяжении всего срока в счет погашения задолженности производятся два платежа, размеры которых R_1 и R_2, а в конце срока выплачивается окончательная сумма R_3. Весь срок разбит на три периода длительностью t_1, t_2, t_3. За период времени t_1 задолженность возрастает до величины D_1 (поскольку на сумму кредита начисляются проценты). По истечении этого времени в счет погашения кредита выплачивается сумма R_1, и размер задолженности становится равным K_1. Далее, за время t_2 сумма K_1 возрастает до величины D_2. По истечении промежутка времени t_2 вносится очередная сумма R_2, размер задолженности уменьшается и становится равным K_2. Наконец, за время t_3 размер задолженности возрастает до величины D_3, и по окончании этого промежутка времени, в момент времени T, выплачивается сумма R_3. Для сбалансированной операции размер платежа R_3 должен быть таким, чтобы задолженность была погашена. Описанный процесс называется *контуром финансовой операции.*

Сбалансированная операция должна иметь замкнутый контур.

Математически процесс погашения задолженности можно описать уравнениями:

$$K_1 = K_0 q^{t_1} - R_1,$$
$$K_2 = K_1 q^{t_2} - R_2, \qquad (3.1)$$
$$K_2 q^{t_3} - R_3 = 0,$$

где $q = (1+i)$ – множитель наращения по сложной ставке.

Последнее уравнение называется *балансовым* и описывает условие сбалансированности операции.

Определим K_2 через K_0 и подставим результат в балансовое уравнение. Получим

$$K_2 = (K_0 q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2,$$
$$((K_0 q^{t_1} - R_1) q^{t_2} - R_2) q^{t_3} - R_3 = 0,$$
$$K_0 q^T - (R_1 q^{t_2+t_3} + R_2 q^{t_3} + R_3) = 0, \qquad (3.2)$$
$$T = \sum_{k=1}^{3} t_k .$$

Таким образом, финансово-кредитная операция может быть разделена на два встречных процесса:

1) наращение первоначальной задолженности за весь период времени;
2) наращение погашающих платежей на срок от момента платежа до конца операции.

Уравнение (3.2) можно преобразовать, умножив его на дисконтный множитель $v^T = (1+i)^{-T}$. Тогда

$$K_0 - (R_1 v^{t_1} + R_2 v^{t_1+t_2} + R_3 v^T) = 0. \qquad (3.3)$$

Таким образом, сумма современных величин погашающих платежей на момент выдачи кредита при полной сбалансированности равна сумме кредита.

Для общего случая n погашающих платежей балансовое уравнение получается аналогично и имеет вид

$$K_0 q^T - \sum_{k=1}^{n} R_k q^{T_k} = 0, \qquad (3.4)$$

где $T_k = \sum_{r=k+1}^{n} t_r$ – время от момента платежа R_k до конца срока.

Если в каждом промежутке t_r действуют различные ставки i_r, то балансовое уравнение имеет вид

$$K_0 q_1^{t_1} q_2^{t_2} \cdots q_n^{t_n} - (R_1 q_n^{t_n} q_{n-1}^{t_{n-1}} \cdots q_2^{t_2} +`R_2 q_n^{t_n} q_{n-1}^{t_{n-1}} \cdots q_3^{t_3} + R_{n-1} q_n^{t_n} + R_n) = 0,$$

где $q_r = 1 + i_r$, $r = 1,2,...,n$.

На основе балансовых уравнений можно измерить доходность финансово-кредитной операции. Для этого нужно составить балансовое уравнение, в котором наращение или дисконтирование производится по неизвестной ставке, характеризующей полную доходность, а затем решить получившееся уравнение относительно искомой ставки.

3.2. Определение полной доходности ссудных операций с удержанием комиссионных

Показателем доходности ссудной операции является годовая ставка сложных процентов, эквивалентная процентной ставке, используемой в данной операции.

За открытие кредита и другие услуги кредитор часто взимает комиссионные, и это повышает доходность операции для него, так как сумма фактически выданная уменьшается.

Пусть ссуда в сумме D выдана на срок n. При ее выдаче удерживаются комиссионные в размере G. То есть, фактически выданная ссуда равна $D-G$. Сделка предусматривает начисление простых процентов по ставке i. При определении доходности данной операции в виде годовой ставки сложных процентов будем исходить из того, что наращение величины $D-G$ по этой ставке должно дать тот же результат, что и наращение величины D по ставке простых процентов i.

Балансовое уравнение для этой операции имеет вид

$$(D-G)(1+i_e)^n = D(1+ni). \qquad (3.5)$$

Чем больше процент комиссионных, тем больше эффективная ставка (ставка полной доходности).

Пусть $G = Dg$, где g – процент комиссионных. Тогда, решая уравнение (3.5) относительно i_e, получим

$$i_e = \left(\frac{1+ni}{1-g}\right)^{1/n} - 1. \qquad (3.6)$$

Эффективная ставка i_e непосредственно не фигурирует в условиях операции, она полностью определяется ставкой процента по кредиту и величиной комиссионных.

Ссуды с периодической выплатой процентов

Пусть ссуда D погашается через n лет, а проценты по простой ставке i выплачиваются регулярно один раз в конце года. Тогда размер выплачиваемых процентов равен Di. С учетом комиссионных сумма ссуды равна $D(1-g)$. Балансовое уравнение запишется в виде

$$D(1-g) - (Dia_{n,i_e} + Dv^n) = 0, \qquad (3.7)$$

где $v = (1+i_e)^{-1}$, a_{n,i_e} – коэффициент приведения годовой ренты.

Уравнение (3.7) эквивалентно следующему

$$f(i_e) = v^n + ia_{n,i_e} - (1-g) = 0. \qquad (3.8)$$

Полученное уравнение решается относительно ставки полной доходности i_e. Так как уравнение (3.8) является нелинейным относительно i_e, то можно получить только приближенное значение i_e при использовании численных методов, например, простых итераций и Ньютона.

Если проценты по кредиту выплачиваются p раз в год, то уравнение для определения доходности операции будет иметь вид

$$f(i_e) = v^n + ia_{n,i_e}^{(p)} - (1-g) = 0.$$

Ссуды с периодическими расходами

Пусть по ссуде периодически выплачиваются проценты и погашается основной долг, причем сумма расходов постоянна. Пусть платежи производятся один раз в конце года и R – ежегодная сумма по обслуживанию долга.

Если долг равен D, то из условия сбалансированности операции получим

$$D = Ra_{n,i},$$

где i – сложная ставка процента по кредиту. Тогда

$$R = \frac{D}{a_{n,i}}. \tag{3.9}$$

Если комиссионные не выплачиваются, то эффективность такой операции в виде сложной годовой ставки процентов совпадает со ставкой по кредиту i. Если комиссионные выплачиваются, то заемщик на самом деле получает сумму, равную $D(1-g)$. Тогда балансовое уравнение имеет вид

$$D(1-g) - Ra_{n,i_e} = 0 \tag{3.10}$$

или

$$f(i_e) = a_{n,i_e} - a_{n,i}(1-g) = 0. \tag{3.11}$$

Так как полученное уравнение (3.11) является нелинейным относительно i_e, то его решение является приближенным и находится с помощью численных методов.

Если погасительные платежи осуществляются p раз в год, то в данном уравнении коэффициент приведения годовой ренты $a_{n,i}$ заменяется на коэффициент приведения p-срочной ренты $a_{n,i}^{(p)}$.

Погашение ссуды нерегулярным потоком платежей

Пусть задолженность погашается путем выплаты нерегулярного потока платежей $R_1, R_2, ..., R_n$.

Балансовое уравнение в этом случае запишется следующим образом

$$f(i_e) = D(1-g) - \sum_{k=1}^{n} R_k v^k = 0, \tag{3.12}$$

где $v = (1+i_e)^{-1}$ – множитель дисконтирования по ставке полной доходности операции. Величина последнего взноса R_n в данном случае зависит от размеров предыдущих платежей и должна определяться из условия сбалансированности финансовой операции (последний платеж должен погашать задолженность), то есть

$$R_n = Dq^n - \sum_{k=1}^{n-1} R_k q^{T_k}, \tag{3.13}$$

где T_k – срок от выплаты k-го платежа до конца сделки, $q = 1 + i$ – множитель наращения с использованием ставки по кредиту i.

3.3. Методы сравнения и анализа коммерческих контрактов

В коммерческой практике часто бывают ситуации, когда один тот же товар можно купить у разных поставщиков, каждый из которых предлагает свои условия продажи (цена, условия кредитования, оплаты сделки и т.д.). Поскольку как моменты выплаты денежных сумм, так и их размеры, как правило, для разных вариантов контрактов не совпадают, то эти условия часто бывают непосредственно не сопоставимы. Для обоснованного выбора наиболее выгодного варианта покупатель должен иметь некоторую аналитическую процедуру, позволяющие определять сопоставимые показатели стоимости контрактов, учитывающие все предусмотренные в контрактах условия.

Анализ контрактов на основе метода капитализации платежей

Пусть платежи приводятся к одному моменту времени, как правило, к началу срока действия соглашения. Вариант с наименьшей современной величиной с финансовой точки зрения считается предпочтительным для покупателя, при приемлемости всех прочих условий.

При расчете современных величин для сравнения контрактов центральным моментом является выбор ставки процентов, по которой производится дисконтирование. Эту ставку называют *ставкой сравнения*. Чем выше эта ставка, тем более отдаленные платежи оказывают меньшее влияние на величину затрат. Таким образом, для инвесторов увеличение ставки сравнения делает предпочтительными контракты с более длительными сроками погашения задолженностей. Рассчитанные по принятой ставке сравнения показатели являются условными, однако установленный таким образом рейтинг является устойчивым.

Рассмотрим три варианта контрактов, когда конкурентными являются условия погашения задолженности. Пусть цена товара является постоянной во всех вариантах и равной P.

В общем случае ставки по кредиту могут быть различными. Чем больше срок кредита, тем больше ставка, поскольку необходимо компенсировать уменьшение стоимости более отдаленных платежей.

Каждый вариант контракта оговаривает следующие основные условия погашения задолженности:

1) авансовые платежи, их размер и моменты выплаты;

2) продолжительность и условия выплаты процентов в льготном периоде, если он предусмотрен (в льготном периоде основной долг не погашается, а выплачиваются только проценты по основному долгу);

3) срок погашения задолженности;

4) метод погашения задолженности.

Задача состоит в том, чтобы выписать уравнения для расчета современных величин потоков платежей, предусмотренных в конкурирующих контрактах. Поскольку в реальной практике может встретиться множество различных вариантов контрактов, то невозможно записать одну единственную формулу, пригодную для всех случаев.

Первый вариант контрактов.

Предусмотрено два авансовых платежа Q_1, Q_2, причем второй платеж выплачивается в момент времени t от начала действия контракта. Процесс погашения задолженности $D_1 = P - (Q_1 + Q_2)$ начинается с момента выплаты второго авансового платежа. Платежи поступают один раз в год в конце года. Поток платежей можно рассматривать как постоянную годовую отложенную на t лет ренту с параметрами R_1, n_1, современная величина которой определяется с использованием ставки, равной ставке сравнения q. Современная величина ренты на момент выплаты второго авансового платежа t равна $R_1 a_{n_1,i}$, а на начальный момент времени $R_1 a_{n_1,i} v^t$, где $v = (1+q)^{-1}$ – множитель дисконтирования по ставке q. Размер отдельного погашающего платежа рассчитывается по формуле $R_1 = \frac{D_1}{a_{n_1,i}}$, где используется ставка по кредиту i.

Таким образом, математически процесс погашения задолженности описывается уравнением

$$A_1 = Q_1 + Q_2 v^t + R_1 a_{n_1,q} v^t \qquad (3.14)$$

или

$$A_1 = Q_1 + Q_2 v^t + (P - (Q_1 + Q_2)) \frac{a_{n_1,q}}{a_{n_1,i}} v^t .$$

Второй вариант контрактов.

Пусть Q_3, Q_4 авансовые платежи, L – продолжительность льготного периода. В льготном периоде выплачиваются только проценты, погашение основного долга начинается после окончания льготного периода. Остаток задолженности после выплаты авансовых платежей равен $D_2 = P - (Q_3 + Q_4)$. Сумма процентов в льготном периоде $D_2((1+i)^L - 1)$ приводится к нулевому моменту путем умножения на множитель дисконтирования v^{t+L}. Погашение основного долга начинается после окончания льготного периода. Поток погашающих долг платежей – отложенная на $t + L$ рента. Современная величина дисконтированных на начальный момент погашающих платежей равна $R_2 a_{n_2,q} v^{t+L}$, где $R_2 = \frac{D_2}{a_{n_2,i}}$, n_2 – период времени, в течение которого погашается основной долг.

Уравнение для определения современной величины платежей имеет вид

$$A_2 = Q_3 + Q_4 + D_2((1+i)^L - 1)v^{t+L} + R_2 a_{n_2,q} v^{t+L}. \quad (3.15)$$

Третий вариант контрактов.

Пусть условия контракта следующие: аванс в сумме Q выплачивается один раз в начале контракта; предусмотрена разовая поставка товара спустя период времени t от момента заключения контракта; предусмотрен льготный период продолжительностью L, который начинается с момента поставки товара; погашение долга осуществляется равными выплатами, причем процесс погашения начинается с момента окончания льготного периода, проценты в льготном периоде выплачиваются периодически один раз в конце года, общий срок контракта $n+t+L$ лет.

Сумма ежегодных процентных платежей в льготном периоде равна $(P-Q)i$. Так как проценты выплачиваются периодически, начиная с момента поставки товара, то поток этих платежей можно рассматривать как отложенную на t лет годовую ренту с параметрами $(P-Q)i, L, q$. Размер погашающих платежей равен $\frac{(P-Q)i}{a_{n,i}}$, поток этих платежей является отложенной на $t+L$ годовой рентой.

Уравнение для определения современной величины платежей имеет вид

$$A_3 = Q + (P-Q)\left(\frac{a_{n,q}}{a_{n,i}} v^{t+L} + i a_{L,q} v^t\right). \quad (3.16)$$

Можно показать, что если современная величина платежей по одному из сравниваемых контрактов больше, чем по другому, то такое же соотношение сохраняется и для других значений ставки сравнения , в случае, если они превышают наибольшую из ставок сравниваемых контрактов или если ставки сравнения меньше наименьшей из этих ставок.

Метод сравнения на основе определения предельных значений параметров контрактов

Задача сравнения контрактов может быть решена путем определения предельного (критического) значения цены или процентной ставки одного из двух сравниваемых контрактов. *Предельным значением* параметра называется его величина, при которой сравниваемый контракт оказывается в финансовом отношении эквивалентным другому, который выбран в качестве базисного при сохранении других условий.

Такой подход к анализу контракта покупатель может применить при определении допустимых значений цены или процентной ставки, когда есть возможность вести переговоры об изменении условий одного из сравниваемых контрактов.

Пусть в контрактах предусматриваются разовые расчеты за товар в конце срока сделки без авансовых платежей. Параметры первого контракта P_1, i_1, n_1 – цена, процентная ставка и срок оплаты. Соответствующие параметры для второго контракта: P_2, i_2, n_2.

Из условия равенства современных величин расходов по двум вариантам контрактов можно записать

$$P_1\left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1} = P_2\left(\frac{1+i_2}{1+q}\right)^{n_2}. \qquad (3.17)$$

1. Определим предельное значение ставки i_2 (значения P_2, n_2 фиксированы), при которой второй вариант эквивалентен первому.

Решая уравнение (3.17), найдем предельное значение ставки i_2^*:

$$i_2^* = (1+q)\left(\frac{P_1}{P_2}\left(\frac{(1+i_1)}{(1+q)}\right)^{n_1}\right)^{1/n_2} - 1. \qquad (3.18)$$

Получим, что с точки зрения покупателя условия второго контракта будут хуже условий первого, если ставки $i_2 > i_2^*$; будут равноценны, если $i_2 = i_2^*$; будут лучше, если $i_2 < i_2^*$.

2. Определим цену P_2 (значения i_2, n_2 фиксированы), при которой второй вариант эквивалентен первому.

Решая уравнение (3.17), найдем предельное значение цены P_2^*:

$$P_2^* = P_1 \frac{(1+i_1)^{n_1}}{(1+i_2)^{n_2}(1+q)^{n_1-n_2}}. \qquad (3.19)$$

Второй контракт эквивалентен первому, если $P_2 = P_2^*$ и выгоднее для покупателя, если $P_2 < P_2^*$.

Предельные значения i_2^*, P_2^* зависят от сроков кредитования и принятой ставки сравнения q. Если сроки одинаковы $n_1 = n_2 = n$, то i_2^*, P_2^* не зависят от ставки q. Тогда

$$i_2^* = (1+i_1)\left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{1/n} - 1, \quad P_2^* = P_1\left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^{n}. \qquad (3.20)$$

Предположим, что кредит погашается равными периодическими выплатами. Тогда предельные процентные ставки по кредиту определяются из условия равенства современных величин потоков платежей, предусмотренных контрактами:

$$P_1\frac{a_{n_1,q}}{a_{n_1,i_1}} = P_2\frac{a_{n_2,q}}{a_{n_2,i_2}}.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$a_{n_2,i_2^*} = \frac{1-(1+i_2^*)^{-n_2}}{i_2^*} = \frac{P_2}{P_1}\frac{a_{n_2,q}}{a_{n_1,q}}a_{n_1,i_1}.$$

Ставка i_2^* находится с помощью численного решения полученного уравнения.

Предельное значение цены P_2^* определяется соотношением:

$$P_2^* = P_1 \frac{a_{n_2,i_2}}{a_{n_2,i_1}} \frac{a_{n_1,q}}{a_{n_2,q}}.$$

3.4. Планирования погашения долгосрочной задолженности

Расходы по обслуживанию долга

Можно выделить три основных цели анализа долгосрочной задолженности:

1) достижение полной сбалансированности займа, т.е. соответствия его параметров принятым условиям финансового соглашения;

2) оценка стоимости займа на любой момент его жизни с учетом всех будущих поступлений по нему;

3) определение эффективности финансовой операции для кредитора.

Достижение полной сбалансированности займа осуществляется путем планирования погашения займа. Планирование заключается в определении периодических расходов, связанных с займом. Такие расходы называются *обслуживанием долга*. Разовую сумму по обслуживанию долга называют *срочной уплатой*.

Срочные уплаты включают:

1) текущие процентные платежи;

2) средства, предназначенные для погашения (амортизации) основного долга.

Методы определения размера срочных уплат зависят от условий займа. Эти условия предусматривают срок, продолжительность льготного периода (при его наличии), уровень процентной ставки, метод погашения и уплаты процентов и основной суммы долга.

Обычно проценты выплачиваются на протяжении всего срока займа периодически. Иногда они начисляются и присоединяются к основной сумме долга. Основная сумма чаще всего погашается частями, причем размеры платежей по погашению (срочная уплата) могут быть одинаковыми или могут изменяться.

В льготном периоде основная сумма долга не погашается, проценты могут выплачиваться периодическими платежами или в конце периода одним платежом, или вообще не выплачиваться, а присоединяться к основной сумме долга.

Пусть

D – сумма задолженности,

I – проценты по займу,

L – продолжительность льготного периода,

R – годовые расходы по погашению основной суммы долга,

g – ставка процентов по условиям займа,

Y – срочная уплата.

В периоде, когда погашается основная сумма долга, срочная уплата состоит из двух элементов: $Y = R + I$. В льготном периоде $Y = I$.

Методы расчета существенно зависят от вида займа. Основной признак классификации займов – метод погашения займа.

Различают следующие виды займов.

1. Займы без обязательного погашения («вечные облигации») – заемщик обязуется выплачивать кредитору в определенные сроки доход в виде фиксированного процента, занятая сумма не возвращается. Заемщик оставляет за собой право выкупить или погасить все выпущенные долговые обязательства в любое время.

1. Займы с обязательным погашением в один срок. Заемщик возвращает занятую сумму в оговоренный срок и выплачивает проценты периодически или в конце срока.

2. Займы с обязательным погашением в несколько сроков. Заемщик возвращает занятую сумму по частям и регулярно выплачивает доход от займа в виде процентов.

Формирование фонда

Для обеспечения долга обычно создается погасительный фонд. Иногда это оговаривается в договоре выдачи займа. Фонд формируется из последовательных взносов, на которые начисляются проценты (например, счет в банке). Возможны различные варианты формирования фонда и выплаты долга.

Первый вариант.

Основной долг погашается из фонда в конце срока разовым платежом. Сумма взносов в фонд с процентами на них должна быть равна долгу на момент его уплаты. Проценты по долгу выплачиваются не из фонда.

Пусть накопление средств в фонде производится путем регулярных ежегодных взносов, размер которых равен R, и на эти взносы начисляются проценты по ставке i. Одновременно происходит выплата процентов , начисляемых на долг по ставке g (проценты выплачиваются не из фонда). Тогда срочная уплата $Y = Dg + R$, где Dg – проценты по долгу, R – платежи в фонд.

Фонд должен быть накоплен за n лет. Платежи в фонд представляют собой ренту с параметрами R, n, i. Разовый взнос в фонд определяется следующим образом

$$R = \frac{D}{s_{n,i}}, \tag{3.21}$$

а срочная уплата –

$$Y = D\left(g + \frac{1}{s_{n,i}}\right). \tag{3.22}$$

Второй вариант

В отличии от первого варианта условия финансового обязательства предусматривают присоединение процентов к сумме основного долга. Тогда взносы в фонд должны обеспечить накопление суммы $D(1+g)^n$. В этом случае

$$Y = \frac{D(1+g)^n}{s_{n,i}}. \qquad (3.23)$$

Ставка i характеризует скорость роста погасительного фонда, а ставка g – сумму выплачиваемых за заем процентов.

Третий вариант

Пусть кредит погашается следующим образом:

– в начале каждого года вносятся равные суммы R в погасительный фонд;

– проценты по кредиту начинают погашаться после первого начисления процентов на взносы в фонд;

– кредитору проценты выплачиваются из фонда;

– в конце срока выплачивается основной долг плюс проценты за последний год по кредиту.

Заметим, что взносы в фонд осуществляются в начале года и проценты по кредиту выплачиваются периодически из фонда.

Рассмотрим процесс формирования фонда.

Первая выплата в фонд в сумме R осуществляется в начале взятия кредита. На сумму R начисляются проценты за n лет (общий срок кредита) по сложной ставке i. В конце срока эта сумма будет равна $R(1+i)^n$.

В начале второго года в фонд вносится сумма R и выплачиваются из фонда проценты по долгу G, т.е. фактически в фонд вносится сумма $(R-G)$, на которую будут начисляться проценты в течение $(n-1)$ лет. К концу срока получим сумму $(R-G)(1+i)^{n-1}$.

В начале третьего года вносим в фонд сумму R и одновременно берем из фонда сумму G. На этот взнос (за вычетом процентов по долгу) будут начисляться проценты в течение $(n-2)$ лет. В результате к концу срока получим сумму $(R-G)(1+i)^{n-2}$.

Последний взнос в фонд осуществляется в момент времени $(n-1)$ и он вместе с начисленными процентами (с учетом изъятия из фонда суммы процентов по долгу) даст сумму $(R-G)(1+i)$.

К концу срока необходимо обеспечить выплату суммы, размер которой равен $(D+G)$ (основной долг плюс проценты по долгу за последний год).

При составлении балансового уравнения все взносы в фонд, с учетом начисления на них процентов в фонде, приравняем сумме долга плюс проценты за последний год. Получим

$$R(1+i)^n + (R-G)(1+i)^{n-1} + (R-G)(1+i)^{n-2} + \ldots + (R-G)(1+i) = D+G$$

Из этого уравнения необходимо определить размер взносов в фонд R. После несложных преобразований балансовое уравнение можно записать в виде

$$R\sum_{k=1}^{n}(1+i)^k - G\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k = D.$$

Заметим, что

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k = \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

так как это множитель годовой ренты. Кроме того,

$$\sum_{k=1}^{n}(1+i)^k = (1+i)\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)^k.$$

С учетом этих соотношений балансовое уравнение запишется следующим образом:

$$R\frac{(1+i)((1+i)^n - 1)}{i} - G\frac{(1+i)^n - 1}{i} = D.$$

Решая полученное уравнение, получим величину взноса в фонд.

$$R = \frac{D}{(1+i)s_{n,i}} + \frac{G}{1+i}. \tag{3.24}$$

Таким образом, взнос в фонд формируется из двух составляющих: суммы, которая обеспечивает выплату основного долга (множитель $(1+i)$ отражает тот факт, что выплаты в фонд осуществляются в начале года); и суммы, которая обеспечивает периодическое погашение процентов по долгу платежами из фонда.

Погашение долга в рассрочку равными платежами

Один из способов погашения долга в рассрочку – погашение равными суммами.

Пусть заем D погашается в течение n лет равными платежами. Тогда сумма, ежегодно идущая на погашение долга, равна d, где $d = \dfrac{D}{n}$. Помимо погашения основного долга должник выплачивает проценты на остаток долга. Будем предполагать, что проценты выплачиваются один раз в конце года по ставке g. Тогда уплата процентов в конце первого года равна Dg, в конце второго – $(D - D/n)g$, в конце третьего – $(D - 2(D/n))g$ и так далее.

Платежи по срочным уплатам формируются следующим образом.

Первая уплата:

$$Y_1 = D(1/n + g).$$

Вторая уплата:

$$Y_2 = D(1/n + g) - (D/n)g = D(1 - 1/n)g + D/n = D/n + (Dg - Dg/n).$$

Срочная уплата на произвольный момент времени t:

$$Y_t = D_t g + d,$$

где $d = D_1/n,\ D_t$ – остаток долга на начало года t $(t = 1,2,...,n)$, определяемый следующим рекуррентным соотношением

$$D_{t+1} = D_t - D_1 / n, \ D_1 = D.$$

Погашение долга в рассрочку равными срочными уплатами

На протяжении всего срока погашения регулярно выплачивается регулярная срочная уплата, часть ее идет в погашение долга, а часть – в погашение процентов за заем. Величина долга убывает после каждой выплаты. Однако в связи с уменьшением выплат по процентам с течением времени увеличиваются суммы, идущие на погашение основного долга. Такой способ называют *прогрессивным погашением*. Срочная уплата $Y = D_t g + d_t$ является постоянной.

Периодически выплачиваемые суммы Y можно рассматривать как постоянную годовую ренту, член которой определяется по формуле

$$Y = \frac{D_1}{a_{n,g}}. \tag{3.25}$$

Определим структуру срочной уплаты, то есть ту ее часть, которая идет на погашения основного долга, и часть, которая идет на погашение процентов.

Размер первого погасительного платежа равен $d_1 = Y - D_1 g$.

Так как $D_1 = Y a_{n,g}$, то $d_1 = Y(1 - g a_{n,g}) = Y v^n$, где $v = \dfrac{1}{1+g}$.

Далее, учитывая, что $D_2 = D_1 - d_1$, получим

$$d_2 = Y - D_2 g = Y - D_1 g + d_1 g,$$

$$d_2 = Y v^n + Y v^n g = Y v^{n-1} = d_1(1+g).$$

Для платежа в момент времени t имеем $d_t = Y v^{n-(t-1)}$ или $d_t = d_1(1+g)^{t-1}$.

Таким образом, можно выписать следующую систему соотношений.

Размер погасительного платежа в году t:

$$d_t = Y - D_t g = d_{t-1}(1+g), \ t = 1,2,\ldots,n; \tag{3.26}$$

$$d_1 = Y - D_1 g = Y v^n = D_1 \frac{v^n}{a_{n,g}} = D_1 \frac{1}{s_{n,g}}.$$

Остаток долга на начало года $t+1$:

$$D_{t+1} = D_t - d_t = D_t(1+g) - Y. \tag{3.27}$$

Сумма погашенного долга на начало года $t+1$:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1 (1+g)^k = d_1 s_{t,g}, \tag{3.28}$$

где $s_{t,g}$ – коэффициент наращения годовой ренты, срок которой равен t лет.

Если погасительные платежи и проценты выплачиваются p раз в год, то применяются соответствующие формулы для p-срочных рент.

4. Количественный анализ реальных инвестиций

Задача анализа и оценки финансовой эффективности инвестиционных проектов с целью отбора наиболее эффективного проекта является одной из основных в управлении финансами. В широком смысле термин *инвестировать* означает любое вложение денежных средств с целью получения доходов в будущем.

Различают два вида инвестиций – реальные и финансовые.

Реальные инвестиции (real investments) означают инвестиции в какой-либо тип материальных активов, таких как земля, оборудование, заводы и т.д.

Финансовые инвестиции (financial investments) – это контракты зафиксированные на бумаге, такие как обыкновенные акции и облигации. В развитых экономиках большая часть инвестиций относится к финансовым инвестициям.

Основным объектом математического моделирования и анализа является поток платежей – суммы распределенных во времени денежных расходов и поступлений, предполагаемых в результате реализации инвестиционного проекта. При этом важную роль играют два фактора, которые связаны с инвестиционным процессом – время и риск. Например, при инвестировании в ценные бумаги с фиксированным доходом (облигации) важнейшим фактором будет время, при инвестировании в рискованные ценные бумаги (обыкновенные акции) существенными являются и время и риск.

С финансовой точки зрения инвестиционный проект объединяет два противоположных процесса:

– вложения денежных средств (с целью создания производственного объекта, накопления капитала и т.д.);

– последовательное получения дохода.

Эти процессы могут протекать последовательно, с разрывом между ними или без, на некоторых отрезках времени параллельно (в этом случае отдача от инвестиций начинается до полного завершения вложений). Оба эти процесса могут иметь разное распределение во времени.

Анализ инвестиций заключается в основном в оценивании и сравнении эффективности альтернативных инвестиционных проектов. Оценка эффективности осуществляется с помощью расчета системы показателей. Будем рассматривать методы оценки эффективности проектов, которые основаны на фундаментальном в финансовом анализе принципе дисконтирования потоков платежей, а именно, на приведении инвестиционных расходов и доходов к одному моменту времени (обычно на начало реализации проекта). При этом наиболее важным моментом является выбор уровня ставки процентов, по которой производится дисконтирование. В анализе реальных инвестиций эту ставку называют *ставкой сравнения*.

Эффективность инвестиций и, следовательно, активность инвесторов зависят от преобладающей на рынке нормы процента. Чем ниже норма процента, тем выше уровень инвестиционных расходов, выгодных инвестору.

Выбор конкретной ставки должен осуществляться на основе экономического анализа, проводимого инвестором. Чем выше ставка, тем в большей мере отражается фактор времени – более отдаленные платежи оказывают меньшее влияние на современную величину потока платежей. Размеры современных величин доходов от вложений являются условными характеристиками, поскольку в существенной мере зависят от принятой для будущего ставки сравнения – рыночной нормы процента.

Важным фактором при анализе инвестиций является учет риска. В инвестиционном процессе риск проявляется в виде возможного уменьшения реальной отдачи от вложений по сравнению с ожидаемой. Оценка эффективности проекта зависит от правильного выбора процентной ставки, по которой производится капитализация платежей. В качестве рекомендации по учету риска предлагается вводить поправку к уровню процентной ставки, то есть добавлять некоторую рисковую премию.

В финансовом анализе реальных инвестиций применяют четыре основных показателя:

1) чистый приведенный доход;
2) внутренняя норма доходности;
3) срок окупаемости;
4) индекс рентабельности.

4.1. Чистый приведенный доход

Для данного показателя в финансовой литературе используется следующее сокращенное обозначение: NPV – от английского термина Net Present Value.

NPV используется в практике крупных и средних предприятий. Допущения, принимаемые при определении NPV:

– потоки денежных средств на весь период реализации проекта известны;

– определена оценка процентной рыночной ставки для будущего (на весь период реализации проекта).

Чистый приведенный доход (NPV) – это разность дисконтированных по ставке сравнения на один момент времени (обычно на начало реализации проекта) потоков доходов и вложений.

Эта величина характеризует абсолютный результат инвестиционной деятельности. Рассмотрим последовательно модели различных наиболее характерных вариантов инвестиционных процессов, на основе которых рассчитывается NPV, начиная с простейших.

1. Пусть инвестиции осуществляются одним платежом в начальный момент времени. Отдача от инвестиций поступает один раз в год в конце года в течение n лет. Обозначим K – размер инвестиций, E – размер ежегодного дохода, W – чистый приведенный доход. Поток доходов можно рассматривать как годовую ренту. Тогда чистый приведенный доход определяется по формуле

$$W = E\frac{1-(1+q)^{-n}}{q} - K, \qquad (4.1)$$

где q – ставка сравнения, первое слагаемое – современная величина потока доходов.

Правило принятия решения на основе NPV состоит в следующем: если W больше нуля, то проект принимается к рассмотрению. Если W равен нулю, то доходы только окупают вложения и прибыли не приносят. Если W меньше нуля, то проект убыточен. При анализе нескольких альтернативных проектов, при прочих равных условиях предпочтение отдается проекту с наибольшим NPV.

2. Пусть вложения и поступления – равномерные дискретные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Процесс отдачи начинается сразу после завершения вложений.

Обозначим n_1 – продолжительность периода вложений (в годах), n_2 – продолжительность периода отдачи от вложений, K – размер ежегодных вложений, E – размер ежегодных поступлений.

Потоки доходов и расходов дисконтируем на начальный момент времени. Расходы представляют собой годовую ренту со сроком n_1. Следовательно, приведенная величина расходов равна $Ka_{n_1,q}$. Доходы – отложенная на n_1 год годовая рента, все платежи которой нужно привести на нулевой момент времени. Современная величина такой ренты определяется по формуле $Ea_{n_2,q}v^{n_1}$, где v – множитель дисконтирования по ставке q. Таким образом, уравнение для определения NPV в этом случае будет иметь вид

$$W = Ea_{n_2,q}v^{n_1} - Ka_{n_1,q}. \tag{4.2}$$

Если процессы вложений и отдачи описываются p-срочными рентами, то необходимо использовать коэффициенты приведения соответствующих p-срочных рент.

3. Предположим, что инвестиционные затраты и доходы разделяются на два неравномерных потока платежей, причем процесс отдачи от инвестиций начинается сразу после окончания вложений и все платежи поступают в конце года. Пусть E_j – размеры доходов в году j ($j = 1,2,...,n_2$), K_t – инвестиционные расходы в году t ($t = 1,2,...,n_1$). Сумма дисконтированных вложений, которая определяется по формуле для современной величины переменного потока платежей равна $\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t$. Дисконтированная на начало инвестиционного проекта величина платежа E_j равна $v^{n_1}E_j v^j$, а сумма дисконтированных платежей E_j даст современную величину потока доходов $v^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} E_j v^j$. Уравнение для NPV имеет вид

$$W = v^{n_1}\sum_{j=1}^{n_2} E_j v^j - \sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t. \tag{4.3}$$

Если отдача начинается спустя n лет после начала осуществления проекта и $n > n_1$, то в данной формуле вместо множителя v^{n_1} необходимо использовать множитель v^n.

4. Предположим, что процессы вложения и отдачи задаются в виде единого неравномерного потока платежей, поступающих один раз в конце года. Это означает, что процессы вложения и получения доходов могут протекать как последовательно, так и параллельно.

Обозначим R_t – размер отдельного платежа. Тогда чистый приведенный доход определяется по формуле

$$W = \sum_t R_t v^t,\ t = 1,2,\ldots,n_1 + n_2, \tag{4.4}$$

где $n_1 + n_2$ – полный срок осуществления проекта. В этой формуле платежи R_t, соответствующие вложениям берутся со знаком минус.

На практике может потребоваться оценка чистого приведенного дохода не на начало инвестиционного проекта, а на некоторый момент времени t. Если W_0 чистый приведенный доход на начальный момент времени, а W_t – на момент времени t, то

$$W_t = W_0(1+q)^t. \tag{4.5}$$

На практике для более надежных выводов рекомендуется величину чистого приведенного дохода определять не для единственного значения ставки сравнения q, а для некоторого диапазона значений этой ставки.

4.2. Внутренняя норма доходности

Для данного показателя в финансовой литературе часто используют сокращенное обозначение IRR (от английского термина Internal Rate Return).

Под *внутренней нормой доходности* понимают расчетную ставку процентов, при которой капитализация получаемого дохода дает сумму, равную приведенным инвестициям, и, следовательно, инвестиционные вложения являются окупаемой операцией.

Экономический смысл данного показателя заключается в том, что в случае, если вложения предшествуют потоку доходов, он дает предельное значение нормы дисконтирования, при которой проект еще остается выгодным. Другими словами, если проект финансируется только за счет привлеченных средств, то значение внутренней нормы доходности показывает верхнюю границу допустимого уровня банковской процентной ставки, превышение которой делает проект убыточным. Обозначим q_b – внутреннюю норму доходности. Если кредит получен по ставке i, то разность $(q_b - i)$ характеризует эффективность инвестиционной деятельности. Если $(q_b - i) = 0$, то доход только окупает инвестиции, если $q_b < i$, то инвестиции убыточны. При сравнении различных инвестиционных проектов выбирается тот, у которого внутренняя норма доходности выше.

Если инвестиции и отдачи от них задаются в виде единого потока платежей, то q_b определяется как положительный корень уравнения

$$\sum_{t=1}^{n} R_t v^t = 0, \tag{4.6}$$

где $v = \dfrac{1}{1+q_b}$ – множитель дисконтирования по искомой ставке q_b, n – общий срок реализации проекта. Выражение слева в данном уравнении есть многочлен степени n относительно переменной $(1+q_b)^{-1}$, коэффициенты которого являются членами потока платежей. Таким образом, задача сводится к определению корней данного многочлена. В общем случае этот многочлен имеет n корней, среди которых могут быть положительные, отрицательные и комплексно-сопряженные. Экономический смысл имеют только положительные корни. По теореме Декарта, число положительных корней многочлена не превосходит числа перемен знака его коэффициентов. Следовательно, если вложения предшествуют процессу отдачи, уравнение имеет единственное положительное решение, и расчет показателя внутренней нормы доходности имеет смысл. Если вложения чередуются с отдачей, в этом случае однозначного решения не существует, и применение данного показателя является некорректным.

Заметим, что решить это уравнение можно только численно.

Рассмотренные в предыдущем разделе модели инвестиционных проектов также можно использовать для определения внутренней нормы доходности, если в соответствующих уравнениях положить $W = 0$ и дисконтирование проводить по искомой ставке q_b.

4.3. Срок окупаемости

Под *сроком окупаемости* понимают продолжительность периода, в течение которого сумма доходов, дисконтированных на момент завершения инвестиций, становится равной сумме инвестиций, приведенных к тому же моменту времени. Дисконтирование осуществляется по ставке сравнения. При определении срока окупаемости, в отличие от других показателей, все платежи приводятся на момент завершения инвестиций (или, что то же самое, на момент начала периода отдачи).

Для наиболее простой модели инвестиций из раздела 4.1 по формуле (4.1), срок окупаемости можно определить из уравнения

$$E\frac{1-(1+q)^{-n_{ok}}}{q} = K.$$

Решая это уравнение относительно переменной n_{ok}, получим

$$n_{ok} = \frac{\ln\left(1-\dfrac{K}{E}q\right)}{\ln(1+q)}. \tag{4.7}$$

Из этой формулы видно, что не всякий уровень дохода приводит к окупаемости инвестиций. Срок окупаемости будет конечной величиной, если $E > qK$ (это следует из свойств логарифмической функции).

Рассмотрим, как определяется срок окупаемости в общем случае.

Пусть K – приведенная к началу периода отдачи величина инвестиций (т.е. K – наращенная сумма всех платежей, которые составляют вложения).

Пусть доходы – произвольный поток поступлений. Тогда срок окупаемости n_{ok} определяется суммированием доходов, дисконтированных по ставке q до тех пор, пока не получим сумму, равную объему инвестиций. Алгоритм определения n_{ok} состоит в следующем. Последовательно определяем величины

$$S_m = \sum_{t=1}^{m} R_t v^t, \ m = 1,2,...,n_2,$$

где n_2 – продолжительность периода отдачи вложений. Как только при некотором значении m выполнятся неравенства $S_m < K < S_{m+1}$, то полагаем, что $n_{ok} = m + \Delta$, где m – целое число лет, Δ – доля года, которая приближенно оценивается по формуле

$$\Delta = \frac{K - S_m}{R_{m+1} v^{m+1}}.$$

Основной недостаток показателя n_{ok} как меры эффективности инвестиций заключается в том, что он не учитывает весь период осуществления проекта и на него не влияет отдача, которая лежит за пределами этого срока. Поэтому рекомендуется этот показатель использовать только как ограничение при принятии решения. Инвестор определяет для себя некоторое критическое значение срока окупаемости n_{kp}, которое еще удовлетворяет его, и если срок окупаемости анализируемого проекта $n_{ok} > n_{kp}$, то проект заведомо не принимается. Только после этого сравнение осуществляется по остальным показателям.

4.4. Индекс рентабельности

Индекс рентабельности показывает, сколько денежных единиц современной стоимости будущего денежного потока доходов приходится на одну денежную единицу приведенных инвестиций.

Предположим, что инвестиционные расходы и доходы – переменные потоки платежей, поступающих один раз в конце года. Тогда индекс рентабельности определяебтся по формуле

$$U = \frac{v^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} E_j v^j}{\sum_{t=1}^{n_1} K_t v^t}. \tag{4.8}$$

Здесь в числителе – современная величина потока доходов на момент начала инвестиционного проекта, в знаменателе – инвестиционные расходы, дисконтированные на этот же момент времени.

Если $U > 1$, то проект принимается к рассмотрению, если $U = 1$, то проект не приносит прибыли, а только окупается, при $U < 1$ проект нерентабелен. Из нескольких проектов выбирается тот, у которого индекс рентабельности наибольший. Очевидно, применение этого показателя корректно, если инвестиции и доходы идут последовательно.

Замечание.

Все рассмотренные показатели предполагают известными используемые при их расчете параметры будущих расходов и доходов, их размеры и время выплат или поступлений. В реальной ситуации эти величины можно определить и спрогнозировать только приблизительно. Кроме того, результаты расчета этих показателей эффективности, за исключением внутренней нормы доходности, существенно зависит от выбора ставки сравнения. Ставка оценивается субъективно финансовым аналитиком и, следовательно, все расчеты с использованием этой ставки также носят условный характер. В связи с этим для уменьшения неопределенности при принятии решений, основанных на использовании рассмотренных показателей, рекомендуется использовать сценарный подход. Он заключается в следующем. Сначала получают оценки показателей эффективности для некоторого базового сценария. В этом сценарии используются наиболее вероятные условия функционирования данного инвестиционного проекта. Затем аналогичные оценки получают для наихудшего варианта (пессимистичного) и наилучшего (оптимистичного).

4.5. Модель инвестиций в человеческий капитал

На основе применения рассмотренного подхода к анализу инвестиций попытаемся ответить на вопрос: стоит ли образование того, чтобы платить за него из своего кармана и сколько стоит платить.

Модель инвестиций в человеческий капитал будем строить при следующих предположениях.

1. Труд образованного и профессионально подготовленного человека производительнее, чем необученного. Следовательно, вложения в образование создают так называемый человеческий капитал, который в дальнейшем должен окупаться и приносить прибыль.

2. Люди, как потребители, заинтересованы в максимизации доходов всей жизни в целом, а не отдельного периода.

3. Существует прямая зависимость между образовательным уровнем работника и его потенциальными заработками.

4. люди принимают решение о вложении в свое образование на основе сопоставления связанных с этим затрат и выгод.

Выгоды образования состоят в ожидаемых будущих более высоких доходах.

Затраты имеют две формы:

а) явные затраты на курс обучения;

б) скрытые затраты, а именно, упущенные в течение обучения заработки.

Выгоды и затраты относятся к разным периодам времени, и поэтому каждый человек, принимая решение об образовании, должен сравнить сегодняшнюю ценность ожидаемых выгод с сегодняшней ценностью ожидаемых затрат.

Рассмотрим индивида, который хочет максимизировать чистый приведенный доход всех своих будущих поступлений. Предположим, что он решает вопрос: получить ли ему дополнительное образование еще в течение одного года. Обозначим C – затраты на образование в течение дополнительного года (оплата за обучение плюс упущенные заработки). Эту величину необходимо сравнить с ожидаемыми выгодами более высоких заработков, предоставленным рынком труда. Пусть B_t – ожидаемый дополнительный годовой заработок в году t, g – рыночная норма процента, N – продолжительность предстоящей трудовой жизни данного индивида. Тогда приведенная величина выгод определяется следующим образом:

$$P = \sum_{t=1}^{N} \frac{B_t}{(1+g)^t}. \tag{4.9}$$

Разность $(P-C)$ – чистый приведенный доход от образования.

Если $(P-C)>0$, то с финансовой точки зрения имеет смысл поучиться еще год. Очевидно, чем меньше C и g, а также чем выше доходы и больше N, тем выгоднее вкладывать деньги в образование.

Пример. Пусть зарплата индивидуума 48000 в год. Если он проучится еще один год, заплатив за курс обучения 20000, то его зарплата возрастет. Определим, на какую величину должна возрасти его зарплата, чтобы было выгодно вкладывать деньги в образование. Примем значение рыночной ставки $g=15\%$. Затраты на обучение $C = 48000 + 20000 = 68000$.

После обучения зарплата увеличится на B денежных единиц в год (предполагаем, что это постоянная величина на протяжении всей оставшейся жизни). Определим величину B. Используя формулу для современной величины годовой ренты, получим уравнение

$$C = \frac{B}{0{,}15}\left(1 - \frac{1}{(1+0{,}15)^N}\right),$$

из которого легко определить значение B. Пусть $N=40$, тогда $B=10200$. Это означает, что обучение будет выгодным с финансовой точки зрения, если будущие доходы индивидуума возрастут не меньше, чем на 10200. Если $N=5$, то расчеты дадут следующий результат: $B=20300$.

5. Количественный финансовый анализ ценных бумаг с фиксированным доходом

К такому виду финансовых обязательств относятся ценные бумаги, приносящие фиксированный доход в виде процентов – облигации, различные сертификаты, привилегированные акции и другие ценные бумаги, по которым выплачивается заранее обусловленный доход. Вложения в ценные бумаги относятся к финансовым инвестициям. Основным видом ценных бумаг с фиксированным доходом являются облигации.

Под *облигацией* понимается ценная бумага, свидетельствующая о том, что ее держатель предоставил заем эмитенту этой бумаги. Облигация, как правило, обеспечивает ее владельцу регулярное получение фиксированного дохода в виде процентов от номинала и в конце срока – некоторой выкупной цены, обычно равной номиналу.

Основные параметры облигации.

1. Номинальная цена или выкупная цена, если она отличается от номинала.

2. Дата погашения.

3. Норма доходности или купонная ставка, по которой регулярно выплачивается доход владельцу облигации.

4. Сроки выплаты процентов.

Определенное значение имеет наличие или отсутствие оговорки о запрете досрочного выкупа облигаций. Наличие у эмитента права досрочного выкупа снижает качество облигации, поскольку повышается степень неопределенности для инвестора.

В зависимости от метода выплаты доходов и способов погашения займов облигации можно классифицировать следующим образом.

1. Облигации, по которым производится только выплата процентов, а капитал не возвращается. Эмитент указывает лишь на возможность их выкупа, не связывая себя конкретным сроком.

2. Облигации, по которым не выплачиваются проценты. Это так называемые облигации с нулевым купоном.

3. Облигации, по которым держателям проценты начисляются и выплачиваются вместе с номиналом в момент погашения.

4. Облигации, дающие право их владельцам на получение периодически выплачиваемого дохода в виде процентов и выкупной суммы в будущем при погашении. Этот вид облигаций наиболее распространен.

Облигация – важный объект финансовых инвестиций и с момента их эмиссии и до погашения они продаются и покупаются по сложившимся на рынке ценам.

Рыночная цена в момент эмиссии может быть ниже, выше либо равна номиналу. Поскольку номиналы различных облигаций могут существенно различаться, то необходим сопоставимый измеритель рыночной цены облигации. Таким измерителем является курс облигации. Под *курсом* облигации понимают покупную цену одной облигации в расчете на 100 денежных единиц номинала.

Пусть P – рыночная цена, N – номинал, K – курс. Тогда, по определению

$$K = \frac{P}{N} 100. \tag{5.1}$$

Основные задачи анализа облигаций следующие:

1) определение полной доходности облигации;
2) определение внутренней стоимости облигации и выявление неверно оцененных ценных бумаг;
3) оценка риска, связанного с вложениями в облигации.

5.1. Определение полной доходности облигации

Общий доход от облигаций складывается из трех элементов.

1. Периодически выплачиваемого купонного дохода.
2. Изменение рыночной цены облигации за определенный период времени. Если облигация была куплена по цене ниже номинала, или, как говорят с дисконтом, то этот элемент доходности – положительная величина. Если облигация была куплена по цене выше номинала, или, как говорят с премией, то этот элемент доходности будет отрицательной величиной. Если покупная цена равна номиналу, то этот элемент доходности отсутствует.
3. Дохода от реинвестиции поступления от купонов.

Существует несколько способов и показателей измерения доходности облигаций. Например, доходность облигации с периодической выплатой процентов можно измерить в виде купонной доходности, но в этом случае не учитывается второй элемент доходности. Будем рассматривать методы определения полной доходности, учитывающие первые два элемента доходности (очевидно, использование купонного дохода зависит от индивидуальных склонностей инвестора и в общем случае его учесть невозможно). Показатель полной доходности измеряет реальную финансовую эффективность облигации для инвесторов и обычно определяется в виде годовой ставки сложных процентов. Для этой ставки в финансовой литературе используют различные наименования – доходность к погашению, обещанная доходность к погашению. Наиболее точный содержательный смысл этого показателя отражает термин обещанная доходность к погашению. На рынке ценных бумаг эта ставка непосредственно не фигурирует. Это расчетная величина, которую можно определить, только исходя из рыночной цены облигации.

Методика расчета полной доходности облигации основана на определении современной стоимости потока платежей, получаемых владельцем облигации. При этом дисконтирование платежей осуществляется по искомой ставке доходности к погашению.

Доходность облигации без выплаты процентов

Такая облигация имеет один источник дохода для инвестора – разность между выкупной ценой облигации (номинал) и ценой приобретения (рыночной ценой). Пусть P – рыночная цена облигации (цена покупки), N – номинал, n –

срок до погашения. В конце срока владелец такой облигации получит сумму, равную номиналу. Эту величину необходимо дисконтировать и приравнять ее современную стоимость к рыночной цене облигации. В результате получим уравнение

$$N\nu^n = P, \tag{5.2}$$

где $\nu = \dfrac{1}{1+i}$, i – искомая ставка доходности.

Это уравнение можно переписать, используя понятие курса

$$\nu^n = \frac{K}{100}.$$

Тогда искомая ставка определяется следующим образом

$$i = \frac{1}{(K/100)^{1/n}} - 1. \tag{5.3}$$

Если курс $K < 100$ или, что то же самое, рыночная цена $P < N$, то ставка i – положительная величина, и данная облигация принесет доход.

Определение доходности облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Доход от этого вида облигаций получают только в виде периодически выплачиваемых процентов от номинала. Пусть проценты выплачиваются один раз в год в конце года, g – купонная ставка, тогда gN – ежегодно получаемый доход. Выплату потока процентных платежей можно рассматривать как вечную ренту. Необходимо приравнять величину этой ренты к покупной цене облигации.

Получим формулу для современной величины вечной ренты. Обозначим A_∞ – современную величину такой ренты. Имеем

$$A_\infty = \lim_{n\to\infty} A = \lim_{n\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{R}{i}.$$

Используем эту формулу для определения полной доходности облигации. Современная величина платежей по облигации равна $\dfrac{gN}{i}$. Приравняем эту величину выкупной цене. Получим уравнение

$$\frac{gN}{i} = P = \frac{K}{100}N,$$

решая которое, определим

$$i = \frac{g}{K}100. \tag{5.4}$$

Если курс $K < 100$, то доходность к погашению $i > g$, если $K = 100$, то $i = g$, если $K > 100$, то $i < g$.

Если процентные платежи выплачиваются p раз в год, то поток этих платежей можно рассматривать как вечную p-срочную ренту. Приравнивая современную величину этой ренты к цене приобретения, получим уравнение, решая которое, определим ставку полной доходности i:

$$i = \left(\frac{g}{P} \frac{100}{K} + 1 \right)^{p} - 1. \tag{5.5}$$

Доходность облигации с выплатой процентов в конце срока

Для такого вида облигаций проценты начисляются и выплачиваются в конце срока в виде одной суммы вместе с номиналом. Эта облигация имеет два источника дохода:

1) проценты за весь период займа;

2) прирост капитала, т.е. разность номинала и выкупной цены.

В конце срока владелец такой облигации получает сумму $N(1+g)^n$.

Дисконтируем эту величину и приравняем результат к цене приобретения. Получим уравнение

$$N(1+g)^n \nu^n = P = \frac{KN}{100},$$

из которого определим ставку

$$i = \frac{1+g}{(K/100)^{1/n}} - 1. \tag{5.6}$$

Если $K < 100$, то $i > g$; если $K > 100$, то $i < g$.

Определение доходности облигации с периодической выплатой процентов, погашаемой в конце срока

Суммарный доход от облигации данного вида складывается из двух элементов:

1) текущего дохода, реализуемого с помощью купонов;

2) дохода, получаемого в конце срока (равного номиналу или выкупной цене, если она не совпадает с номиналом).

Предположим, что купонные платежи выплачиваются один раз в год. Тогда поток этих платежей можно рассматривать как годовую ренту. Дисконтируя эти платежи и приравнивая результат к выкупной цене, получим уравнение

$$N(1+i)^{-n} + Nga_{n,i} = P,$$

или используя понятие курса

$$\left((1+i)^{-n} + ga_{n,i}\right)100 = K. \tag{5.7}$$

Это уравнение необходимо решить относительно ставки i. Оно имеет единственное положительное решение, которое можно определить только численно.

Если купонные платежи выплачиваются p раз в год, то уравнение примет вид

$$\left((1+i)^{-n} + ga_{n,i}^{(p)}\right)100 = K.$$

И в этом случае искомая ставка определяется численно.

Доходность облигации с учетом налогов

Пусть имеем облигацию с периодической выплатой процентов и погашением в конце срока. Введем две налоговые ставки: m – ставка налога на прирост капитала, h – ставка налога на текущий доход. Сумма налога на прирост капитала равна $m(N-P)$. С учетом этого налога владелец получит в конце срока не номинал, а сумму $(N-m(N-P))$. Сумма налога на текущий доход равна hNg. С учетом этого налога владелец периодически будет получать сумму, равную $(1-h)Ng$.

Дисконтируем поток платежей с учетом налогов и приравняем результат к покупной цене облигации. Получим уравнение

$$(N-m(N-P))v^n+(1-h)Nga_{n,i}=P.$$

Если использовать понятие курса, то данное уравнение можно преобразовать к виду:

$$\frac{100}{1-mv^n}((1-m)v^n+(1-h)ga_{n,i})=K. \qquad (5.8)$$

Ставку доходности к погашению можно определить только численно. Если платежи поступают p раз в год, то в этом уравнении коэффициент приведения $a_{n,i}$ заменяется на коэффициент приведения p-срочной ренты $a_{n,i}^{(p)}$.

5.2. Доходность портфеля облигаций

Разумный инвестор вкладывает деньги не в один вид ценных бумаг, а формирует *портфель облигаций*, который включает различные по видам и срокам облигации. Простейший анализ портфеля заключается в оценке полной доходности портфеля. Доходность портфеля измеряется в виде годовой ставки сложных процентов. Эта ставка определяется из решения уравнения, в котором общая стоимость облигаций, входящих в портфель, приравнивается к сумме современных величин всех видов платежей по облигациям.

Пусть S_t – элемент потока платежей в момент времени t, Q_j – количество облигаций вида j, входящих в портфель, P_j – цена приобретения одной облигации вида j. Уравнение для определения доходности имеет вид

$$\sum_t S_t v^t-\sum_j Q_j P_j=0. \qquad (5.9)$$

Здесь $\sum_j Q_j P_j$ – рыночная стоимость портфеля, $\sum_t S_t v^t$ – сумма современных величин всех платежей по всем облигациям, которые входят в портфель.

Ставка определяется только численно.

5.3. Оценивание облигаций. Базовая модель оценивания облигаций

Одной из основных целей финансового анализа ценных бумаг является выявление тех бумаг, которые неверно оценены рынком.

Предположим, что в некоторых случаях на основе общедоступной информации можно выявить облигации, неверно оцененные рынком. Для этого необходимо иметь некоторую аналитическую процедуру, основываясь на которой инвестор мог бы выявить такие процедуры и с учетом этого принимать обоснованные решения относительно продажи или покупки этих облигаций.

Возможны два подхода к решению данной задачи.

1. Ставка доходности к погашению облигаций, которые анализирует инвестор, сравнивается со значением ставки, которое является «справедливым» по мнению инвестора. Свое мнение инвестор формирует на основе анализа как характеристик облигации, так и текущей рыночной ситуации. Если доходность облигации выше справедливой, то говорят, что облигация недооценена и в этом случае она – кандидат на покупку. Если доходность к погашению меньше справедливой, то облигацию называют переоцененной, и тога она – кандидат на продажу.

2. Инвестор оценивает истинную или внутреннюю стоимость облигации и сравнивает ее с рыночной ценой. Если текущая рыночная цена меньше внутренней стоимости, то облигация недооценена рынком, и наоборот, если текущая рыночная стоимость больше внутренней стоимости, то облигация переоценена.

Обе процедуры анализа и оценки облигации основаны на методе капитализации дохода, т.е. на приведении всех платежей по облигации к настоящему моменту времени.

Доходность к погашению

Методы определения доходности к погашению (точнее – обещанной доходности к погашению) были рассмотрены ранее. Рассмотрим более общую модель для определения этого показателя.

Пусть P – текущая рыночная цена облигации с остаточным сроком обращения n лет и предполагаемыми денежными выплатами инвестору $C_1, C_2, ..., C_n$. Тогда обещанная доходность к погашению – это процентная ставка, определяемая из уравнения.

$$P = \frac{C_1}{(1+i)} + \frac{C_2}{(1+i)^2} + ... + \frac{C_n}{(1+i)^n}$$

или

$$P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i)^t}. \quad (5.10)$$

Пусть i^* – некоторая справедливая, по мнению эксперта, ставка. Тогда, если $i > i^*$, то облигация недооценена; если $i < i^*$, то облигация переоценена на рынке; если $i = i^*$, то облигация оценена рынком справедливо.

Внутренняя стоимость (базовая модель оценивания облигаций)

Метод, основанный на определении внутренней стоимости, предполагает, что внутренняя стоимость любого актива, в том числе облигации, определяется дисконтированными величинами платежей, которые инвестор ожидает получить в будущем за счет владения этим активом.

Определим внутреннюю стоимость облигации следующим образом:

$$V = \frac{C_1}{(1+i^*)} + \frac{C_2}{(1+i^*)^2} + \ldots + \frac{C_n}{(1+i^*)^n}$$

или

$$V = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i^*)^t} . \qquad (5.11)$$

Данную модель называют базовой моделью оценивания облигации (The Basic Bond Valuation Model).

Чистая приведенная стоимость (NPV) облигации

$$NPV = V - P = \sum_{t=1}^{n} \frac{C_t}{(1+i^*)^t} - P . \qquad (5.12)$$

Если $NPV > 0$, то облигация недооценена рынком; если $NPV < 0$, то переоценена. Любая облигация, у которой $i > i^*$, будет иметь $NPV > 0$ и наоборот.

Для оценивания облигации путем капитализации дохода должны быть рассчитаны значения C_t, P, i^*. Величины платежей C_t известны, значение рыночной цены P также известно. Ставка i^* зависит от субъективной оценки инвестором как характеристик облигации, так и текущих условий на рынке. Таким образом, основной составляющей анализа облигаций является определение справедливого, по мнению данного инвестора, значения ставки i^*.

Влияние параметров облигации на ее внутреннюю стоимость

Параметры, которые определяют стоимость облигации: срок, купонные платежи (купонная ставка) и рыночная ставка. Из формул, определяющих внутреннюю стоимость, следует, что повышение ставки приводит к уменьшению внутренней стоимости облигации. Таким образом, внутреннюю стоимость – это изменяющаяся величина, зависящая от колебаний уровня рыночного процента. С увеличением срока облигации влияние на внутреннюю стоимость современной величины выкупной цены понижается, а влияние современной величины купонных платежей растет. Изменение рыночной ставки в большей мере влияет на оценку при увеличении срока.

Рекомендации для инвесторов. Если на рынке установилась высокая ставка и ожидается дальнейший ее рост, то инвесторы стремятся заменить долгосрочные облигации краткосрочными. Если ожидается падение рыночной ставки, то краткосрочные облигации заменяются долгосрочными.

Чем ниже купонный доход, тем ниже внутренняя оценка облигации. При этом повышается чувствительность оценки к изменению рыночной ставки. Относительное изменение оценки в результате изменения ставки будет тем меньше, чем выше купонная ставка.

Рекомендации для инвесторов. При ожидаемом падении уровня рыночной ставки инвесторы стремятся приобрести облигации с меньшей купонной доходностью. В этом случае, если происходит снижение уровня рыночной ставки, купленные облигации дают больший относительный прирост их оценки.

5.4. Формулы для оценивания облигаций

Для оценки внутренней стоимости облигаций различного вида удобно пользоваться формулами, полученными с учетом особенностей поступления платежей по данному виду облигаций.

Облигации без обязательного погашения с периодической выплатой процентов

Выплаты по такой облигации можно рассматривать как вечную ренту. Определение внутренней стоимости сводится к определению современной величины такой ренты. Соответствующая формула имеет вид:

$$V = \frac{gN}{i^*}. \tag{5.13}$$

Если доход по облигации выплачивается p раз в год, то

$$V = \frac{gN}{p((1+i^*)^{1/p} - 1)}. \tag{5.14}$$

Облигации без периодической выплаты процентов

По такой облигации проценты выплачиваются в момент погашения займа. Владелец получает сумму $N(1+g)^n$. Формула для расчета внутренней стоимости:

$$V = N\left(\frac{1+g}{1+i^*}\right)^n. \tag{5.15}$$

Облигации с нулевым купоном

Владельцу выплачивается только номинал или выкупная цена, проценты не выплачиваются. Расчетная формула:

$$V = N\left(\frac{1}{1+i^*}\right)^n. \tag{5.16}$$

Облигации с погашением в один срок и периодической выплатой дохода

Пусть проценты выплачиваются регулярно один раз в год в конце года, и погашение производится по номиналу. Дисконтируя платежи, получим

$$V = N\nu^n + gNa_{n,i^*}, \quad (5.17)$$

где $\nu = \dfrac{1}{1+i^*}$.

Если доход выплачивается p раз в год, то

$$V = N\nu^n + gNa_{n,i^*}^{(p)}. \quad (5.18)$$

5.5. Оценка риска, связанного с вложениями в облигации

Определение полной доходности и внутренней стоимости недостаточно для принятия решения о вложениях в тот или иной вид облигаций. Это связано с тем, что инвестиции в любые ценные бумаги сопряжены с определенным риском. Выделяют два основных вида рисков:

1) кредитный;
2) рыночный.

Кредитный риск связан с возможностью отказа эмитентом от своих обязательств, что может повлечь либо полное прекращение выплаты текущих платежей и выкупной цены, либо нарушение оговоренных сроков выплат.

Рыночный риск связан с колебаниями рыночной процентной ставки, которые в значительной мере влияют на изменение внутренней стоимости облигации и, соответственно, рыночной цены облигации.

Рыночный и кредитный риски связаны со сроком облигации – чем больше срок, тем выше риск. Однако просто срок облигации, т.е. период владения от ее приобретения до погашения, не учитывает особенность распределения доходов во времени у разных видов облигаций – так называемый *профиль доходов*. Очевидно, при прочих равных условиях риск вложений в облигации, по которым периодически выплачиваются проценты, меньше, чем риск вложений в облигации без выплаты процентов.

Средний риск

Этот показатель учитывает сроки выплат всех видов облигаций в виде взвешенной среднеарифметической величины. В качестве весов берутся размеры платежей. Таким образом, чем больше сумма платежа, тем большее влияние на средний срок оказывает срок выплаты этого платежа.

Рассмотрим облигацию, у которой купонные платежи поступают один раз в год в конце года. Пусть C_t – ожидаемый платеж по облигации, t, $t = 1,2,...,n$, – срок платежа. В поток платежей включаем и платежи по номиналу. При этих условиях средний срок определяется по формуле

$$T = \frac{\sum_{t=1}^{n} tC_t}{\sum_{t=1}^{n} C_t}. \quad (5.19)$$

Средний срок $T < n$, если купонная ставка $g > 0$.

Для облигации без выплаты купонных платежей (по такой облигации владелец получает только номинал в конце срока) $g = 0$ и $T = n$. Чем больше текущий доход по облигации относительно номинала, тем меньше средний срок T и, следовательно, меньше риск, связанный с инвестицией в данный вид облигации.

Для облигации с ежегодной выплатой процентов и погашением номинала в конце срока данная формула примет вид:

$$T = \frac{Ng\sum_{t=1}^{n} t + nN}{nNg + N} \qquad (5.20)$$

поскольку в данном случае $C_t = gN$ при $t = 1,2,\ldots,n-1$; $C_n = gN + nN$. Заметим, что

$$\sum_{t=1}^{n} t = \frac{n(n+1)}{2}$$

– сумма членов арифметической прогрессии. Учитывая это, формулу для среднего срока можно привести к виду

$$T = n\frac{g(n+1)/2+1}{gn+1} \ . \qquad (5.21)$$

Аналогично можно получить формулу для случая, когда купонные платежи поступают несколько раз в год.

Средняя продолжительность платежей – дюрация

В отличие от среднего срока облигации при расчете показателя «*дюрация*» в качестве весов принимаются не суммы платежей, а их дисконтированные величины. Следовательно, при определении дюрации учитывается фактор времени. В общем виде дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{n} tC_t v^t}{\sum_{t=1}^{n} C_t v^t}, \qquad (5.22)$$

где v – множитель дисконтирования по ставке доходности к погашению

Поскольку в качестве ставки дисконтирования берется ставка доходности к погашению, то

$$P = \sum_{t=1}^{n} C_t v^t, \qquad (5.23)$$

где P – текущая рыночная цена облигации.

С учетом этого соотношения будем иметь

$$D = \sum_{t=1}^{n}\left(\frac{C_t v^t}{P} t\right). \qquad (5.24)$$

Таким образом, современная стоимость каждого платежа выражается как доля рыночной цены P, и эти доли умножаются на время t. Облигация без выплаты процентов имеет дюрацию $D = n$. Действительно, поскольку эта облигация имеет только один платеж $C_n = N$, то $C_n v^n = P$.

Учитывая это, получим

$$D = \frac{C_n v^n}{P} n = n .$$

Для всякой купонной облигации $D < n$ $(g > 0)$.

Рассмотрим облигацию с периодической выплатой процентов один раз в конце года и погашаемую в конце срока. Для такой облигации дюрация определяется по формуле

$$D = \frac{Ng\sum_{t=1}^{n} t v^t + nNv^n}{P} . \qquad (5.25)$$

Как было отмечено ранее, стоимости облигаций с одинаковыми сроками погашения, но с различными купонными платежами, по-разному меняются при одном и том же изменении процентной ставки. Однако облигации, имеющие одинаковую дюрацию, реагируют на изменение ставки сходным образом. В связи с этим инвесторы при формировании портфеля облигаций стремятся включать в портфель облигации с одинаковой дюрацией. Этот метод называется *иммунизацией* портфеля и позволяет ограничить влияние будущих колебаний рыночной процентной ставки на ожидаемые доходы.